José D. Gallardo Ku

NOTAS EN TEORÍA DE LA INCERTIDUMBRE

Notas en teoría de la incertidumbre

José D. Gallardo Ku

NOTAS EN TEORÍA DE LA INCERTIDUMBRE

ET LUX IN TENEBRIS LUCET
MCMXVII
FONDO EDITORIAL
PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DEL PERÚ

BIBLIOTECA NACIONAL DEL PERÚ
Centro Bibliográfico Nacional

338.5 Gallardo Ku, José, 1965-
G15 Notas en teoría de la incertidumbre / José D. Gallardo Ku.-- 1a ed.-- Lima: Pontificia Universidad Católica del Perú, Fondo Editorial, 2018 (Lima: Tarea Asociación Gráfica Educativa).
163 p.; 21 cm.

Bibliografía: p. 161-163.
D.L. 2018-18677
ISBN 978-612-317-433-0

1. Incertidumbre (Economía) 2. Riesgo (Economía) 3. Toma de decisiones 4. Microeconomía I. Pontificia Universidad Católica del Perú II. Título

BNP: 2018-506

Av. Universitaria 1801, Lima 32, Perú
feditor@pucp.edu.pe
www.fondoeditorial.pucp.edu.pe

Diseño, diagramación, corrección de estilo y cuidado de la edición:
Fondo Editorial PUCP

Primera edición: diciembre de 2018
Tiraje: 500 ejemplares

Hecho el Depósito Legal en la Biblioteca Nacional del Perú Nº 2018-18677
ISBN: 978-612-317-433-0
Registro del Proyecto Editorial: 31501361801264

Impreso en Tarea Asociación Gráfica Educativa
Pasaje María Auxiliadora 156, Lima 5, Perú

Índice

Índice de tablas y figuras

Agradecimientos

En los pasados años nuestra profesión de economistas ha sido conmovida por la partida de varios colegas, todos ellos entrañables: Tatiana Velasco, Valerie Fry, Roberto Machado, Jorge Fernández-Baca, Alonso Polar, Javier Silva Ruete, Abel Salinas, Héctor Noejovich, así como los notables maestros Ramón García Cobián e Iván Rivera. Este texto está dedicado a ellos, especialmente a Valerie y a Tatiana.

Conocí a Valerie Fry a comienzos de la década de 1990, en el Grupo de Análisis para el Desarrollo, cuando ella trabajaba con Alberto Pasco-Font. Posteriormente, luego de su regreso de sus estudios de posgrado en la Universidad de Harvard, los tres fuimos coautores en un conocido estudio de demanda para los servicios de telefonía. Con Valerie y un grupo de amigos iniciamos, en aquella década, las discusiones de economía que nos llevarían, muchos años después, a plantear aportes al país en materia de política económica, aunque ya sin ella, pues nos dejó, discreta y prematuramente, en el año 2011. Siempre la recordaremos con alegría y agradecimiento.

Conocí a Tatiana Velasco en la PUCP a finales de la década de 1980. Muy joven, ella era ya todo lo que la Escuela de Economía quiere de sus alumnos: una profesional extraordinariamente competente, con un sólido conocimiento teórico y aplicado de su especialidad, culta, ética, con visión del país y partidaria de un proyecto institucional. Pero Tatiana fue, sobre todo, una persona generosa, solidaria, de principios, enemiga de las injusticias; para todos sus amigos y compañeros de clases fue una de las mejores personas que la vida nos permitió conocer.

Agradezco la iniciativa de Eduardo Jiménez en el CIES y la valiosa contribución de mis alumnos en la PUCP: Álvaro Cox, Martín Villarán, Milagros González, Hiroshi Toma, Jorge Tudela, Marcia Ruiz, Sandro Huamaní, Abel Camacho, César Gil Malca y, muy especialmente, a mi colega Janneth Leyva, quienes, en diferentes momentos, han transcrito las notas de clases, realizado importantes aportes y editado el documento. El libro también se ha beneficiado grandemente de los comentarios y sugerencias de los alumnos de la maestría en economía de la PUCP, quienes a lo largo de varios años han utilizado estas notas. No obstante, todos los errores y omisiones son míos.

Prefacio

Este libro ha sido elaborado como parte de las actividades del Consorcio de Investigación Económica y Social (CIES) y tiene como propósito ser una referencia en el tópico de la incertidumbre para docentes y alumnos de los cursos de microeconomía que se imparten en las diferentes universidades del país.

El libro está basado en mis notas de clase de diversos cursos de microeconomía dictados a lo largo de la última década en la Pontificia Universidad Católica del Perú, así como en los cursos de Extensión Universitaria y de Actualización del Banco Central de Reserva del Perú, dirigidos a alumnos y docentes, respectivamente. Estas notas también sirvieron para seminarios y cursos dictados en la Universidad Nacional Mayor de San Marcos, la Universidad Nacional de Piura, la Universidad Peruana de Ciencias Aplicadas y la Universidad San Ignacio de Loyola. A su vez, el origen de mis notas presentadas en este volumen puede ser hallado principalmente en las notas de clase de Carl Shapiro en la Universidad de California en Berkeley, así como en los textos de Hirshleifer y Riley (1992) y Varian (1992).

El material está organizado de la siguiente manera. En primer lugar, se presentan los aspectos conceptuales y metodológicos para el análisis de la incertidumbre (capítulos 1 y 2). Luego, se desarrollan el enfoque de la utilidad esperada, las críticas a este enfoque, la aversión al riesgo y su manejo (capítulos 3 y 4). Posteriormente, se analiza el comportamiento en dos contextos de incertidumbre especiales: el de dominancia estocástica, esto es, cuando la información de probabilidades es suficiente, y el enfoque media-varianza, cuando estos dos primeros momentos de la distribución de probabilidades resumen las preferencias (capítulos 5 y 6). Finalmente, se desarrollan cuatro aplicaciones en teoría de la regulación, economía laboral e informalidad, teoría financiera y macroeconomía (capítulo 7).

Introducción

La elección de los individuos en contextos de incertidumbre, es decir, en situaciones en las que las decisiones que toman tienen efectos *ex ante* inciertos o incluso potencialmente muy negativos en relación con el bienestar de los individuos, es un problema microeconómico habitual. La relevancia de estudiar este tipo de problemas radica en que la incertidumbre es un elemento inherente a una parte importante de las decisiones de los consumidores, las empresas y los gobiernos en temas como las inversiones, los seguros, las compras de bienes duraderos, la evasión tributaria y la regulación de industrias.

En numerosos problemas en microeconomía los individuos racionales toman decisiones de tal manera que optimizan sus agendas o funciones objetivo al utilizar eficientemente la información disponible y resolver buenamente sus restricciones[1]. En este mismo sentido,

[1] El caso más difundido en microeconomía posiblemente sea el de un consumidor que maximiza su nivel de bienestar de acuerdo a su presupuesto. Así, dicho consumidor escoge las cantidades de bienes que comprará según los precios vigentes en el mercado, su nivel de ingresos y sus preferencias, lo que le permite tener una teoría de la demanda de bienes y servicios. En la medida en que el consumo de una canasta implica el sacrificio del consumo de otras cantidades de bienes, el concepto de costo de oportunidad es inherente al problema de optimización.

en un problema de incertidumbre, los individuos deben optar entre diferentes alternativas riesgosas y escoger *ex ante* aquella opción que les brinde el mayor bienestar esperado, el cual, a su vez, está determinado por las probabilidades de los eventos, sus grados de aversión al riesgo, los pagos en cada opción riesgosa, entre otros factores.

Un ejemplo cotidiano de decisión bajo incertidumbre puede ser la elección de un taxi por una persona que se retira tarde de su centro de trabajo. En este contexto, el individuo debe optar entre salir y tomar el taxi que en ese momento pasa por la calle donde trabaja o llamar a una empresa de taxis acreditada para que esta envíe una unidad a recogerlo. La segunda opción implica un costo de espera y el pago de un precio mayor que el de la primera, pero tiene la ventaja de minimizar la probabilidad de un secuestro al paso, modalidad de robo que se ha hecho más frecuente en algunas ciudades del país como Lima Metropolitana.

Tomar un taxi de la calle supone, por tanto, pagar un precio menor que el del taxi acreditado, pero también estar sujeto a una mayor probabilidad de robo, que de producirse conllevaría a una pérdida sustancialmente mayor que la diferencia de precios entre los dos tipos de taxi (considérese el valor del celular, el efectivo disponible, el valor de prendas de vestir, del reloj, además de la muy desagradable experiencia de sufrir un asalto). Implícitamente al optar por un taxi acreditado el individuo paga por un seguro.

La realidad observable, que es finalmente lo que se desea explicar, es bastante variada. Algunas personas solicitan un taxi acreditado. Muchas otras, en cambio, escogen tomar un taxi en la calle. Más aún, algunos individuos toman el taxi acreditado algunas veces y el taxi de la calle otras veces. Pero en todas estas situaciones parece claro que la riqueza, la actitud hacia el riesgo y la percepción del mismo son variables importantes para explicar la decisión de los individuos. Así, tienden a tomar la opción menos riesgosa, pagando el seguro, aquellos individuos que tienen mayores ingresos, aquellos que requieren transportar artículos valiosos (servicios hacia o desde los aeropuertos), aquellos que perciben una mayor probabilidad de robo (quienes necesitan solicitar el servicio tarde en la noche), aquellos que idiosincráticamente son bastante temerosos frente a los robos (quienes exhiben una gran aversión al riesgo).

La teoría de la incertidumbre que se desarrolla en este libro es aplicable a situaciones como estas y es directamente extensible a numerosas situaciones cotidianas: la familia que asegura su auto ante la eventualidad de un accidente o que asegura su casa ante la probabilidad de un sismo de gran magnitud; el inversionista que debe construir un portafolio de inversiones diversificado que incluya acciones de su país y de otros países, lo que lo lleva a enfrentar un riesgo cambiario y un riesgo país, en adición al riesgo específico de cada activo; el campesino que debe decidir si fertiliza sus tierras sin saber si tendrá agua en cantidades adecuadas para que su inversión sea rentable; el agricultor de la costa norte que considera diversificar sus riesgos causados por la ocurrencia de un eventual Fenómeno del Niño e invierte en bienes raíces en Lima; los viajeros que compran un seguro de salud para casos de accidente o enfermedad; el ciudadano que decide evadir el pago de sus impuestos; el gobierno que debe escoger el esquema de regulación de precios más adecuado para una empresa concesionaria con incertidumbre en costos o demanda, entre otros.

Como se ha señalado en líneas anteriores, consistentemente con el desarrollo de la literatura, se postula que en todos estos casos los individuos escogen, entre las opciones riesgosas que están disponibles, aquella que optimiza su bienestar, el cual es representado o resumido por la denominada «función de utilidad esperada». Como veremos más adelante, esta función se define para cada individuo como la esperanza matemática de la utilidad. El supuesto de una representación de las preferencias con una función de este tipo es el comienzo de una extensa literatura que señala los límites del enfoque y abre la puerta de otras y numerosas contribuciones en distintos ámbitos del conocimiento económico.

Limitaciones

La probabilidad de ocurrencia de cada evento incierto, el grado de aversión al riesgo y la riqueza son, sin duda, elementos muy relevantes en el estudio de la decisión bajo incertidumbre, pero no son suficientes para explicar exhaustivamente la realidad observable. Por ejemplo, los estudios sobre el desarrollo de la economía campesina por el laureado Theodore Schultz (1964) o la aplicación de este marco explicativo al caso de la economía campesina de la sierra sur del país en el magnífico estudio de Figueroa (1981) destacan la relevancia de la aversión al riesgo y los bajísimos niveles de riqueza de los campesinos en su decisión de no fertilizar las tierras debido al temor que malas condiciones climáticas les hagan perder su inversión.

Sin embargo, la economía del comportamiento ha identificado otros factores que también pueden ayudar a explicar esta subinversión en fertilizantes. De acuerdo con Rabin (1998) y con O'Donoghue y Rabin (1999), los individuos tienen una tendencia hacia la «procrastinación», es decir, a postergar, diferir, aplazar el sacrificio (por ejemplo, priorizan el consumo y postergan el ahorro o la inversión). En esta perspectiva, Duflo, Kremer y Robinson (2010) encuentran evidencia de campesinos en Kenia que están dispuestos a invertir en fertilizantes en el momento de la cosecha, pero que no lo hacen en el momento de la siembra, cuando tienen que desembolsar el dinero. Según estos autores, los individuos cambian de decisión porque la inversión supone postergar consumo y en el momento de la siembra el dinero es más escaso, por lo que están menos dispuestos a invertir en fertilizantes a pesar de su convencimiento del impacto de estos en la productividad.

De otro lado, existen números desarrollos que muestran las limitaciones del enfoque de la utilidad esperada para dar cuenta de las decisiones de los individuos en contextos de incertidumbre, las cuales son usualmente representadas como paradojas o por inconsistencias en los grados de aversión al riesgo implicados por este enfoque (Machina, 1987; Rabin, 2000)[2]. Asimismo, en el marco de la teoría financiera, una de las principales áreas de aplicación del enfoque de la utilidad esperada, son bastante conocidas las críticas a la «teoría del portafolio». Entre estas críticas destaca la débil relación entre retorno esperado y riesgo documentada por autores como Fama y French (1992).

También, a partir de la década de 1970, con la emergencia de la economía de la información, se han entendido mejor los límites de resultados derivados de la teoría de la incertidumbre, como el reparto de riesgos entre individuos con diferentes grados de aversión al riesgo, para dar paso a una nueva era de teoría de los contratos y provisión de incentivos en contextos de información asimétrica, más específicamente de acciones que son no observables o no verificables.

Es también importante señalar que, en general, la modelación del comportamiento de los individuos constituye un reto formidable. Autores como McFadden (1999) encuentran que las serias limitaciones en la ciencia económica para explicar satisfactoriamente el comportamiento de los individuos tienen su origen en que las acciones humanas

2 Más específicamente, Machina (1987) presenta una excelente revisión del tema de incertidumbre y desarrolla en detalle la famosa paradoja de Allais, usualmente citada para ilustrar anomalías del enfoque. Esta paradoja es desarrollada en este libro. De otro lado, una crítica al enfoque en términos del grado de aversión al riesgo implicado por la utilidad esperada puede ser hallada en Rabin (2000).

están afectadas por aspectos como las anomalías cognitivas (asociadas, por ejemplo, a errores en la percepción). Asimismo, de acuerdo con este autor, en el proceso de elección parecen ser relevantes no solo las preferencias egoístas de los individuos sino también aspectos como las emociones o el afecto. Autores como Tversky y Kahneman, en su programa de investigaciones sobre el comportamiento de los individuos, encuentran diversas limitaciones empíricas en los axiomas del comportamiento racional (muchas veces violados de manera sistemática). Sin embargo, los autores también hallan evidencia de comportamientos de alguna manera consistentes con la existencia de aversión al riesgo, cuyas repercusiones son desarrolladas en estas notas.

A pesar de estas limitaciones, el enfoque axiomático de la teoría de la utilidad esperada —en continuo contraste con los estudios de la teoría del comportamiento— es útil para arribar a una mejor comprensión de las consecuencias de la introducción de incertidumbre en el análisis económico. En particular, este enfoque continúa realizando aportes significativos a los marcos conceptuales de distintos problemas en las ramas de la microeconomía y la macroeconomía.

Así, en el problema regulatorio, Armstrong, Cowan y Vickers (1994) desarrollan un modelo que permite comprender mejor la conveniencia de diversos esquemas regulatorios. Más específicamente, el modelo permite entender por qué esquemas que proveen incentivos altos para la reducción de costos, y que aparecieron en una etapa teórica posterior, no siempre son los más adecuados. Como se muestra en una sección posterior, la volatilidad de factores que determinan los costos unitarios de producción y la aversión al riesgo pueden más que compensar los efectos de los incentivos de alto poder del esquema regulatorio.

Asimismo, desarrollos relativamente recientes en la teoría de la inversión permiten modelar esta variable a partir de decisiones irreversibles, determinadas por la presencia de costos hundidos en un contexto de incertidumbre[3]. En su examen de la relevancia empírica de las teorías de la inversión, Caballero (1997) señala que el enfoque de la inversión basada en la incertidumbre ayuda a explicar mejor la realidad observable en comparación con contribuciones previas como la teoría neoclásica de Jorgenson o la famosa teoría de la *q* de Tobin.

Aspectos metodológicos

La teoría estándar del consumidor bajo el denominado «enfoque de las preferencias» es metodológicamente muy útil para plantear el problema de decisión bajo certidumbre. En aquel enfoque se estudia la decisión de un individuo que debe escoger óptimamente entre todas sus posibilidades una canasta de consumo. Se asume que las preferencias de los individuos satisfacen los axiomas de transitividad, completitud, monotonicidad y convexidad, y que estos axiomas son consistentes con la existencia de una función de utilidad que resume las preferencias de los consumidores si estas son continuas. En este contexto, el individuo simplemente escoge aquella canasta que le reporta mayor utilidad. En la teoría de la incertidumbre se asume que los individuos escogen la opción riesgosa que les genera la mayor utilidad esperada y existe un tratamiento axiomático de alguna manera análogo a la teoría del consumidor.

Por otro lado, las decisiones de los individuos no se aplican solo a variables continuas —como la cantidad demandada de algún bien o servicio— sino también a opciones de tipo discreto. Por ejemplo, un trabajador puede decidir ir a su centro de trabajo en bus, en taxi o en movilidad propia, si dispone de ella. Lo que determina su elección

3 Ver en Dixit y Pindyck (1994) una exposición detallada de la teoría de la inversión moderna, en la cual la variable presenta enormes similitudes con una opción financiera.

entre estas opciones discretas son los precios de estas opciones, el tiempo de recorrido asociado a cada opción, el precio de bienes duraderos (auto propio), etcétera.

En el contexto de los problemas económicos que incorporan eventos inciertos son particularmente relevantes las decisiones entre opciones discretas. Así, en el ejemplo referido a la diferencia en la probabilidad de sufrir un secuestro al paso entre un taxi normal y un taxi de agencia («seguro»), se vuelve bastante evidente la importancia de desarrollar un esquema que nos permita modelar el riesgo asociado a los dos tipos de opciones.

Para el estudio de estos problemas la herramienta de análisis estándar es la utilidad esperada, que constituye la función objetivo en un contexto de incertidumbre. Un aspecto clave de este enfoque es que los individuos asignan probabilidades a los eventos que generan incertidumbre. Es decir, el problema económico modelado es uno en el que el individuo desconoce cuál será la realización de la variable que genera la incertidumbre (si efectivamente será asaltado por el taxista que tomó en la calle), pero conoce la probabilidad de ocurrencia de cada una de las posibles realizaciones (conoce la distribución de probabilidades entre todos los eventos posibles). En el límite, como veremos en el caso de dominancia estocástica, el individuo puede tomar decisiones basándose prácticamente en su solo conocimiento de las probabilidades.

En el marco de este modelo, las alternativas entre las que puede elegir el consumidor toman la forma de loterías, las cuales consisten en un conjunto de pagos o premios a los que les ha sido asignada una determinada probabilidad de ocurrencia. Estos premios o pagos pueden adoptar distintas formas, incluso las habituales canastas de consumo de la teoría estándar del consumidor.

La teoría de la incertidumbre estándar nos dice que, bajo el cumplimiento de un conjunto de axiomas sobre las preferencias de los individuos, es posible representarlas mediante una función de utilidad análoga a la del enfoque de las preferencias de la teoría del consumidor. En otras palabras, la satisfacción de los axiomas permite cumplir con la existencia de la utilidad esperada, también conocida como la función de utilidad de tipo Von Neumann-Morgenstern.

Capítulo 1
Elementos en el problema de incertidumbre[1]

Un individuo que toma una decisión en un contexto de incertidumbre puede elegir *ex ante* entre distintas opciones que le proporcionan pagos inciertos. El individuo no puede naturalmente determinar el valor del pago, pues este depende simultáneamente de su elección y de la ocurrencia de cierto estado de la naturaleza, cuya realización depende de circunstancias externas al agente económico. En esta sección utilizaremos el ejemplo del taxi seguro o acreditado para exponer los distintos elementos que se ponen en juego cuando un individuo decide bajo incertidumbre.

En el problema de un individuo que se enfrenta a la disyuntiva de optar entre un taxi acreditado o un taxi de la calle interactúan los siguientes elementos:

1. Un conjunto de a acciones o alternativas $\{1, 2, \ldots a\}$ entre las que puede elegir el consumidor. En nuestro ejemplo, la decisión de tomar un taxi acreditado y la decisión de tomar un taxi de la calle constituyen las únicas alternativas por lo que $a=2$. Esta decisión depende de las características del individuo modelado.

[1] En el desarrollo de esta sección se sigue el texto de Hirshleifer y Riley (1992).

2. Un conjunto de n estados de la naturaleza $\{1, 2, \dots n\}$. En nuestro ejemplo, los estados son dos: sufrir o no sufrir un asalto. Nótese que estos estados no pueden ser controlados por el individuo ya que nadie «decide» ser víctima de un robo.

3. Una función de pagos $\{C_{an}\}$, que resulta de la combinación entre las acciones y los estados. En el caso del taxi, si el agente toma un taxi de la calle y ocurre el estado robo, entonces pierde su riqueza y su pago final será 0. El pago depende por tanto de la elección de una acción y de la ocurrencia de un estado.

4. Una función de probabilidad $\{\pi_n\}$, que expresa las creencias del individuo sobre la realización de cada estado de la naturaleza, dada una acción. Como se ha señalado, los individuos modelados son capaces de construir una distribución de probabilidades para los estados de la naturaleza. En nuestro ejemplo, la probabilidad de que un individuo que toma un taxi de la calle sufra un robo es π_R.

5. Una función de utilidad elemental $v(c)$, que refleja las preferencias de los individuos por los distintos pagos que podría obtener.

En la tabla 1 se resumen todos los elementos que intervienen en el problema de decisión del individuo en el contexto del ejemplo antes señalado. Como se mencionó, el individuo modelado tiene dos alternativas definidas en el eje vertical: puede tomar un taxi acreditado o uno de la calle, y la naturaleza define dos estados mostrados en el eje horizontal: robo y no robo. El individuo le asigna una probabilidad de ocurrencia π_n a cada estado, los que juntamente con las acciones determinan cuatro pagos distintos C_{an}. A su vez, estos pagos son función de su nivel de riqueza $w = 50$ y del costo del servicio de transporte. En este ejemplo se asume que los precios de tomar un taxi de la calle y un taxi acreditado son respectivamente $P_{TC} = 5$ y $P_{TA} = 15$. Las probabilidades mostradas en la parte inferior de la tabla se refieren a la opción riesgosa taxi de la calle.

Tabla 1. Elementos de decisión en un problema de incertidumbre[2]

Acciones \ Estados de la naturaleza	No robo	Robo
Taxi acreditado	35	35
Taxi de la calle	45	0
Probabilidades	π_{NR}	π_R

El ejemplo es bastante claro en mostrar las características del problema de incertidumbre tratado. En el análisis que hace el individuo de opciones inciertas es relevante que no exista una opción que sea *ex ante* mejor que otra para cada uno de los estados de la naturaleza. Algunas opciones riesgosas tienen que ser mejores que otras para algunos estados de la naturaleza, pero peores para otros.

Así, en el ejemplo, si el individuo decide tomar un taxi normal y no ocurre un asalto, entonces su bienestar es el mayor posible $v(45)$, pero si ocurre el asalto su bienestar es el menor posible $v(0)$. En comparación, la opción taxi seguro proporciona pagos que no son tan altos o bajos, es decir, es una opción menos riesgosa, pero no necesariamente preferible, pues el precio que cobra un taxi acreditado es mayor al precio que debe pagar el individuo por un taxi de la calle.

El caso del taxi seguro no solo ilustra claramente el problema de elección entre alternativas riesgosas sino también que el individuo puede estar dispuesto a pagar un seguro. En este caso, la opción taxi seguro es modelada como no riesgosa y sobre ella se define la posibilidad de este seguro. Por tanto, la modalidad taxi seguro reduce en este ejemplo la probabilidad de robo a 0, pero al costo de pagar un monto adicional (diferencial de precios).

2 Todas las tablas y figuras han sido elaboradas por el autor.

¿Cómo resuelve el individuo este problema? En general, ¿cómo escoge el individuo entre opciones inciertas? Para la solución de este problema se requiere de un criterio de decisión para el individuo. En el siguiente capítulo se emplea la función de utilidad esperada como criterio para la solución de este tipo de problema y se discute sobre sus limitaciones para reflejar adecuadamente las preferencias de los individuos en la realidad observable.

Capítulo 2
Teoría de la utilidad esperada[1]

La teoría de la utilidad esperada integra los elementos de decisión bajo incertidumbre introducidos en el capítulo anterior con el objetivo de explicar cómo el individuo escoge, en dicho contexto, entre sus estrategias o acciones posibles, aquella que le es más beneficiosa. Como se explica en las siguientes líneas, en un contexto de incertidumbre el individuo escogerá aquella opción que maximice su utilidad esperada. No obstante, empezaremos por revisar un criterio de decisión históricamente previo al de la utilidad esperada y muy intuitivo desde una perspectiva práctica, el criterio del valor esperado.

2.1. Valor esperado versus utilidad esperada

Un criterio de decisión intuitivo alternativo al de la utilidad esperada es el del valor esperado. Este está definido como la esperanza matemática de los pagos recibidos en los diferentes estados de la naturaleza al escoger una opción (esto es, la suma de todos los resultados de una acción ponderados por sus respectivas probabilidades de ocurrencia).

[1] En el desarrollo de esta sección se siguen los textos de Hirshleifer y Riley (1992) y Varian (1992), en sus capítulos referidos a la incertidumbre, así como el artículo de Machina (1987).

En otras palabras, el individuo podría calcular el valor esperado de cada estrategia riesgosa y a partir de allí escoger la opción que le reporte el mayor valor:

$$VE = \sum_{i=1}^{N} \pi_i . c_i$$

Donde:
VE es el valor esperado
N es el número de estados de la naturaleza
π_i es la probabilidad del i-ésimo estado de la naturaleza
c_i es el consumo que se tendría en el estado i

En nuestro ejemplo de la tabla 1, si la probabilidad de robo al elegir un taxi no acreditado es de 10%, entonces el individuo preferirá este tipo de taxi, pues elegir esta opción le reporta un valor esperado de S/ 40.5, mientras que a la opción del taxi seguro le corresponde un valor esperado de S/ 35. Sin embargo, este cálculo no considera la poca predisposición que tienen los individuos a elegir opciones que no les reportan un pago seguro debido a que su resultado depende de que ocurra un determinado estado de la naturaleza, cuya realización escapa a su control. Cuando existe incertidumbre sobre los pagos, los individuos suelen no aceptar juegos justos[2]. Inclusive suelen no aceptar juegos con pagos favorables o no participar en juegos con potenciales ganancias grandes si esto implica pagar un costo de acceso alto. La evidencia sobre este comportamiento se remonta a más de dos siglos atrás y es ingeniosamente recogida por la denominada paradoja de San Petersburgo postulada por Nicolás Bernoulli.

2 Los juegos justos se caracterizan por tener un beneficio esperado igual a 0 (en valor esperado no se gana ni se pierde). Por ejemplo, un juego en el que una alumna apuesta con su amigo que el cielo estará nublado al día siguiente, en el cual recibirá 100 si gana y pagará 200 si pierde, cuando la probabilidad de que el cielo amanezca nublado es 2/3.

2.1.1. La paradoja de San Petersburgo[3]

La formulación estándar de esta paradoja es una en la que un individuo es invitado a participar en un juego que consiste en lanzar sucesivamente una moneda en la que de un lado está grabada una cara y del otro, un escudo, hasta que salga la primera cara. El costo del juego es S/ 100 y el premio que recibe un individuo que participa está dado por S/ 2^i, donde i es el número del lanzamiento en el cual salió la primera cara.

Esto quiere decir que si ocurre una cara en el primer lanzamiento el pago asciende a S/ -98, si ocurre en el segundo lanzamiento es de S/ -96 y si ocurre en el tercer lanzamiento es de S/ -92. Pero este pago crece exponencialmente si la primera cara no ocurre en los primeros lanzamientos. Por ejemplo, si la primera cara ocurre en el sétimo lanzamiento, el pago es de S/ 28, si ocurre en el octavo lanzamiento el pago es de S/ 156 y si ocurre en el noveno, de S/ 412. Para lanzamientos posteriores el pago es muy alto. Los pagos y probabilidades para algunos lanzamientos se resumen en la siguiente tabla:

Tabla 2. Pagos en la paradoja de San Petersburgo

Lanzamiento	Pago (c_i)	Probabilidad (π_i)
1	$2 - 100 = -98$	1/2
5	$32 - 100 = -68$	1/32
10	$1024 - 100 = 924$	1/1024
…	…	…

3 En una notable revisión sobre los aspectos resueltos y no resueltos de la elección bajo incertidumbre, Machina (1987) presenta una exposición detallada sobre modelos de preferencias alternativos a la utilidad esperada.

La paradoja consiste en el hecho sorprendente de que, a pesar de que el valor esperado del juego es infinito, la evidencia empírica muestra que, en general, los individuos optan por no participar, tal como se demuestra en la siguiente expresión:

$$VE \equiv \sum_i \pi_i . y_i = \sum_{i=1}^{+\infty} (0.5)^i \times 2^i = \sum_{i=1}^{+\infty} (0.5 \times 2)^i = \sum_{i=1}^{+\infty} 1 = +\infty$$

Es decir, el individuo prefiere una opción cuyo valor esperado es 0 —que es el pago de la opción «no participar»— a una opción cuyo valor esperado es infinito (un premio infinito menos el costo por concepto de participación). El ejemplo sugiere claramente que en la noción de valor esperado existe una limitación que impide que este criterio pueda ser empleado satisfactoriamente como criterio de decisión bajo incertidumbre.

La solución a esta paradoja se produjo tempranamente y es atribuida a Gabriel Cramer y Daniel Bernoulli[4]. Dicha solución consiste en notar que lo relevante para un individuo no es el pago de una opción riesgosa, sino la utilidad que dicho pago genera. Más recientemente, se ha entendido mejor que la paradoja se produce porque el criterio de valor esperado no considera aspectos centrales en el estudio de la incertidumbre como la aversión al riesgo. Es decir, la razón por la que los individuos se rehúsan a participar en el juego es porque los individuos reconocen que existe una elevada probabilidad de que salga cara en los primeros lanzamientos, por lo que participar del juego implicaría enfrentarse a una probabilidad muy alta de sufrir una pérdida[5].

4 Machina (1987) señala que la paradoja fue planteada en 1728 por Nicolás Bernoulli y resuelta, en 1738, por su sobrino Daniel y por Gabriel Cramer.

5 El encuadre del juego puede tener un rol importante en este caso, dado que el análisis del problema enfatiza los peores escenarios posibles. Desde otra perspectiva, el valor esperado del juego es infinito pero la varianza esperada también lo es, lo cual introduce una segunda dimensión en el análisis de la paradoja de San Petersburgo (Autor, 1994).

La utilidad esperada, definida como la esperanza matemática de la utilidad de los pagos que corresponden a una determinada opción, permite incorporar explícitamente la existencia de aversión al riesgo. Formalmente, la utilidad esperada se define de la siguiente manera:

$$U^e = \sum_{i=1}^{N} \pi_i . v(c_i)$$

Donde:
U^e es la utilidad esperada
π_i es la probabilidad de que ocurra el estado de la naturaleza i
c_i es el pago que corresponde a la realización de este estado de la naturaleza
$v(\cdot)$ es una función de utilidad elemental que satisface los axiomas clásicos
N es el número de estados de la naturaleza

Como se verá más claramente en las siguientes líneas, el rasgo de aversión al riesgo puede ser adecuadamente recogido por una función cóncava. Para ilustrar este punto consideremos que, en el contexto de la paradoja de San Petersburgo, las preferencias de los individuos por los distintos pagos pueden ser representadas por una función de utilidad de tipo logarítmica: $v(c_i) = ln(c_i)$. Dada esta forma funcional, la utilidad esperada de participar en el juego será:

$$U^e \equiv \sum_{i} \pi_i . v(y_i) = \sum_{i=1}^{+\infty} (0.5)^i . ln 2^i = ln 2 \sum_{i=1}^{+\infty} \frac{i}{2^i} = ln 2 \left(\frac{1}{2} + \frac{2}{4} + \frac{3}{8} + \ldots \right)$$

$$= 2 . ln 2 \cong 1.386$$

El enfoque media-varianza desarrollado en el capítulo 6 modela individuos cuya utilidad crece con un mayor retorno (ingreso esperado) pero disminuye con un mayor riesgo (varianza).

Es decir que, aun cuando el valor esperado del juego es muy alto, la utilidad esperada es bastante baja[6]. La utilidad esperada es mucho menor que la utilidad que proporcionan los S/ 100 que le hubiera costado al individuo participar en el juego y esto explica por qué los individuos no aceptan participar en el juego. Aunque también existen limitaciones intrínsecas al enfoque de la utilidad esperada, es claro que, para diversas situaciones, este criterio de decisión es superior al de valor esperado, entre otras razones porque, como se explica en los siguientes capítulos, la existencia de aversión al riesgo está implícita en el uso del enfoque de la utilidad esperada.

2.2. Sustento axiomático de la utilidad esperada

Cuando el individuo toma decisiones en un contexto de incertidumbre elige entre acciones con un resultado incierto. Autores como Laffont (1989) o Varian (1992) definen estos eventos inciertos como loterías definidas sobre los pagos o consecuencias. De acuerdo con la notación de este último, una lotería es denotada por:

$$p \circ x \oplus (1-p) \circ z$$

Esta notación nos dice que en el evento incierto el individuo recibe el pago x con probabilidad p y el pago z con probabilidad $(1-p)$. De otro lado, Hirshleifer y Riley (1992) definen el evento incierto como $(c_1, c_2; \pi_1, \pi_2)$, es decir, el individuo recibe c_1 con probabilidad π_1 y c_2 con probabilidad π_2. A lo largo de este capítulo se empleará una combinación de estas dos notaciones para hacerla más amigable al lector. Los eventos inciertos o loterías, quedarían entonces definidos de la siguiente manera:

$$\pi_1 \circ c_1 \oplus \pi_2 \circ c_2$$

[6] Ver este ejemplo y reflexión en Nicholson (1989).

Esta notación nos dice que el individuo recibe el pago c_1 con probabilidad π_1 y el pago c_2 con probabilidad π_2. Una vez elegida la notación por utilizar, veamos algunas propiedades de las loterías.

2.2.1. Condiciones de regularidad

Varian (1992) impone las siguientes condiciones de regularidad sobre la percepción de los consumidores respecto de las loterías disponibles:

$$R1\text{: } (\pi_1 = 1) \circ c_1 \oplus \pi_2 \circ c_2 \sim c_1$$

$$R2\text{: } \pi_1 \circ c_1 \oplus \pi_2 \circ c_2 \sim \pi_2 \circ c_2 \oplus \pi_1 \circ c_1$$

$$R3\text{: } \pi_1 \circ c_1 \oplus \pi_2 \left(p \circ c_1 \oplus (1-p) \circ c_2 \right) \sim (\pi_1 + \pi_2 p) \circ c_1 \oplus \pi_2 (1-p) \circ c_2$$

La primera condición de regularidad (*R*1) nos dice que si en una lotería se recibe un pago c_1 con una probabilidad π_1 que se aproxima a 1, este evento es equivalente a recibir el pago c_1 con total seguridad. La segunda condición (*R*2) nos dice que al consumidor no le importa el orden en el que los pagos y sus probabilidades son presentados. Por último, la tercera condición (*R*3) nos dice que la percepción que los individuos tienen de una lotería compuesta depende solamente de las probabilidades netas, es decir, cualquier lotería compuesta puede ser expresada como una lotería simple una vez se hayan resumido sus probabilidades. Por ejemplo, si una lotería es tal que con 50% de probabilidad un individuo obtiene un monto *Z* y con 50% participa de otra lotería en la que con 50% se obtiene *Z* y con 50% se obtiene 0, entonces esta lotería es equivalente a una en la que el individuo obtiene *Z* con 75% de probabilidad y 0 con 25% de probabilidad.

2.2.2. Axiomas

1. Axioma de continuidad: este axioma señala que si se prefiere la lotería $p \circ c_1 \oplus (1-p) \circ c_2$ a una lotería L, entonces debe ocurrir que cualquier otra lotería que aumente la probabilidad del mayor pago también sea preferida a L. Inversamente, si una lotería L es preferida a la lotería $p \circ c_1 \oplus (1-p) \circ c_2$, entonces las preferencias se mantendrán para cualquier otra lotería que disminuya la probabilidad del mayor pago. Formalmente, este axioma implica que:

$$\{p \in [0,1]: p \circ c_1 \oplus (1-p) \circ c_2 \succcurlyeq L\} \textit{ es un conjunto cerrado}$$

$$\{p \in [0,1]: L \succcurlyeq p \circ c_1 \oplus (1-p) \circ c_2\} \textit{ es un conjunto cerrado}$$

2. Axioma de monotonicidad: Sea un conjunto de pagos $c_B > \ldots c_2 > \ldots > c_1 \ldots > c_W$, donde c_B es el mejor pago y c_W el peor. Este axioma nos dice que el individuo siempre preferirá, entre dos loterías que exhiben los mismos pagos, aquella lotería que le asigne una mayor probabilidad de ocurrencia al pago más alto. Si se considera que $c_2 > c_1$, se debe cumplir que:

$$p \circ c_2 \oplus (1-p) \circ c_1 \succcurlyeq q \circ c_2 \oplus (1-q) \circ c_1, \, si\text{: } p \geq q$$

3. Axioma de independencia: este axioma señala que, si un individuo es indiferente entre dos pagos, mantendrá esta indiferencia si ambos pagos se combinan con un tercer pago en loterías en las que el tercer pago tiene la misma probabilidad:

$$Si\text{: } c_i \sim c_j, \, entonces\text{: } p \circ c_i \oplus (1-p) \circ c_k \sim p \circ c_j \oplus (1-p) \circ c_k$$

Se pueden encontrar casos en los que el individuo no es neutral a este ordenamiento, por lo que el axioma de independencia suele ser el más debatido. Esta posible no neutralidad es ilustrada en el siguiente ejemplo. Supongamos que los pagos c_P, c_C y c_k representan los pagos de viajes a distintos destinos turísticos, en distintas épocas del año, para un individuo que debe escoger cuándo y dónde vacacionar:

$$c_P \equiv \textit{es el pago por viajar a Piura en la primera quincena de enero}$$

$$c_C \equiv \textit{es el pago por viajar a Cusco en la primera quincena de julio}$$

$$c_K \equiv \textit{es el pago por viajar a Cusco en la última quincena de julio}$$

Si el individuo debe solicitar en su centro laboral su mes de vacaciones con antelación (todo el mes de enero o todo el mes de julio), aun cuando pueda ser indiferente entre las dos primeras opciones, es claro que la tercera opción resulta ser un mejor complemento de la segunda debido a que el individuo sabe que con probabilidad de 100% viajará a Cusco en el mes de julio. El individuo puede terminar por preferir la segunda combinación de probabilidades y pagos (p, $1 - p$; c_C, c_K,) a la combinación (p, $1 - p$; c_P, c_K,), aun cuando sea indiferente entre c_P y c_C. Es decir, las opciones C y K resultan tener mayor complementariedad entre sí que p y K.

2.3. La utilidad esperada

Sobre la base de los supuestos de regularidad y los axiomas de las preferencias, consideremos un supuesto adicional respecto a la escala de la utilidad que proporcionan los pagos. Si el conjunto de pagos es tal que:

$$c_B \succ \ldots c_2 \ldots \succ c_1 \ldots \succ c_W$$

Se define un rango de valores para la función de utilidad elemental entre 0 y 1, entonces la utilidad de los pagos es tal que la utilidad del pago más alto es la 1 y la utilidad del pago más bajo es 0:

$$v(c_B) = 1$$

$$v(c_W) = 0$$

Donde:
$v(\cdot)$ es una función de utilidad elemental que satisface los axiomas clásicos
c_B es el mayor pago
c_W el pago más bajo

Consideremos una asignación de probabilidades p y $1-p$ para estos pagos, de tal manera que se construye una lotería L donde se obtiene el mayor pago c_B con probabilidad p y el menor pago c_W con probabilidad $1-p$. ¿Cómo se compara cualquier pago c_i con esta lotería? Naturalmente, se espera que para valores suficientemente altos de p la lotería L sea preferida a c_i y, para valores lo suficientemente bajos de esta probabilidad, el pago c_i sea preferido a la lotería L. Según este razonamiento, debe existir una probabilidad p para la cual se cumpla la condición de indiferencia:

$$c_i \sim p \circ c_B \oplus (1-p) \circ c_W$$

Este valor debe existir porque las preferencias son continuas y debe ser único porque, de acuerdo con las propiedades descritas, las preferencias son monótonas. Como esta probabilidad es única podemos llamarla p_i. Es decir, existe una única probabilidad que hace que el individuo sea indiferente entre el pago seguro de c_i y participar de la lotería que resulta de la combinación convexa de los pagos c_B y c_W. Dado que esta probabilidad es única, existe la posibilidad de indexarla, según un procedimiento análogo al enfoque de las preferencias en la teoría del consumidor. Así, podemos afirmar que la utilidad que proporciona c_i es p_i. Formalmente:

$$v(c_i) \sim v\left(p_i \circ c_B \oplus (1-p_i) \circ c_W\right)$$

$$utilidad\,(c_i) \sim p_i$$

Podemos, entonces, definir la utilidad elemental evaluada en c_i como:

$$v(c_i) = p_i$$

Por lo tanto, se puede expresar cualquier lotería como una combinación convexa de c_B y c_W. Este artificio nos permite obtener la fórmula de la utilidad esperada. Considérese una lotería cualquiera que supone un pago c_1 con probabilidad π_1 y un pago c_2 con probabilidad π_2:

$$(\pi_1 \circ c_1 \oplus \pi_2 \circ c_2)$$

Pero, por el desarrollo anterior, sabemos que cada pago c_i puede expresarse con una única lotería que combina el mejor y el peor pago:

$$(\pi_1 \circ c_1 \oplus \pi_2 \circ c_2) \sim \pi_1 \circ \left(p_1 \circ c_B \oplus (1-p_1) \circ c_W\right) \oplus \pi_2 \left(p_2 \circ c_B \oplus (1-p_2) \circ c_W\right)$$

$$(\pi_1 \circ c_1 \oplus \pi_2 \circ c_2) \sim (\pi_1 p_1 + \pi_2 p_2) \circ c_B \oplus \left(\pi_1 (1-p_1) + \pi_2 (1-p_2)\right) \circ c_W$$

De la anterior formulación queda claro que si deseamos conocer la utilidad que nos reporta esta lotería basta tener en cuenta las probabilidades que multiplican a c_B pues $v(c_W) = 0$ por construcción. Entonces:

$$v(\pi_1 \circ c_1 \oplus \pi_2 \circ c_2) = (\pi_1 p_1 + \pi_2 p_2) v(c_B) = \pi_1 p_1 + \pi_2 p_2 = \pi_1 v(c_1) + \pi_2 v(c_2) = U^e$$

$$\pi_1 v(c_1) + \pi_2 v(c_2) = U^e$$

Por ende, bajo preferencias continuas y monótonas, la utilidad de una lotería es igual a la esperanza matemática de la utilidad de los pagos inciertos que corresponden a dicha lotería. En otras palabras, la utilidad de una lotería es la utilidad esperada. Así, en términos de la agenda por optimizar, los individuos escogen entre opciones inciertas de tal manera que maximizan su utilidad esperada (ver Nicholson, 1989).

- **Ejemplo: Evasión tributaria**

La existencia de una función de utilidad esperada que resume las preferencias de los individuos en situaciones de incertidumbre nos permite analizar problemáticas en distintas áreas de la política pública. Un ejemplo es el modelo de Allingham y Sandmo (1972) para el caso de la evasión tributaria. Los autores desarrollan un modelo que explica cómo los agentes tienen incentivos para no declarar todos sus ingresos a una entidad encargada de la recolección de impuestos.

En este caso, la decisión relevante de subdeclarar ingresos por parte de un contribuyente se explica por la imposibilidad de verificar los ingresos de los individuos en numerosas situaciones en las que parte o la totalidad de estos ingresos provienen de transacciones no reportadas. En estas situaciones, los agentes económicos, sabiendo que existe una importante probabilidad de no ser descubierto y sancionado, deciden no declarar parte de su ingreso.

En el modelo de Allingham y Sandmo, el individuo tiene una riqueza W, la cual es conocida únicamente por él. En la medida en que el individuo sabe que esta información no es conocida por el organismo recaudador, puede optar entre declarar todo su ingreso o una cantidad menor a su ingreso verdadero. En ambos casos el Estado le cobra una fracción θ de la riqueza reportada. No obstante, si decide declarar una cantidad menor a su verdadera riqueza, entonces, existe la posibilidad de que las autoridades realicen una investigación sobre sus ingresos y descubran la falta, esto con una probabilidad π. En este caso, el individuo es penalizado mediante la aplicación de una tasa impositiva γ mayor a θ sobre el monto no reportado. Por otro lado, con una probabilidad $1-\pi$ el individuo no será sujeto de investigación y mantendrá parte de su riqueza exenta de impuestos. Para determinar la cantidad de riqueza reportada X, el individuo resuelve:

$$Máx_X U^e = (1-\pi).v(W-\theta.X) + \pi.v\big(W-\theta.X-\gamma.(W-X)\big)$$

En la optimización sin restricciones, el monto no reportado óptimo debe satisfacer la usual condición de primer orden:

$$\frac{\partial U^e}{\partial X} = -(1-\pi).\theta.v'(W-\theta.X) + \pi.(\gamma-\theta).v'\big(W-\theta.X-\gamma(W-X)\big) = 0$$

Si la solución es interior, entonces el monto no reportado en equilibrio no será nulo ni tampoco máximo (igual a la riqueza). Por lo tanto, la condición de primer orden evaluada en un nivel de ingresos cercano a 0 debe ser positiva, mientras que la evaluada en W debe ser negativa. Es decir, para una solución interior se cumplen dos condiciones:

$$\pi.\gamma > \theta\left[\pi + (1-\pi)\frac{v'(W)}{v'\big(W.(1-\gamma)\big)}\right]$$

$$\pi.\gamma < \theta$$

De estas dos inecuaciones se desprende que las principales variables que afectarán la decisión del individuo de declarar o no la totalidad de su riqueza son la probabilidad de ser detectado π, que depende de aspectos como la fortaleza institucional del Estado y las capacidades del órgano recaudador (sistemas informáticos, personal especializado, entre otros), la magnitud de la penalización $(\gamma - \theta)$, la tasa impositiva regular θ y el nivel de riqueza W. Formalmente, el ingreso declarado depende de estas variables:

$$X^{*} = g\left(\theta, (\gamma - \theta), W, \pi\right)$$

Para mostrar algunos efectos sobre el monto declarado de estas variables, se puede asumir una función de utilidad v con especificación logarítmica natural. El problema de maximización de la función de utilidad esperada pasa a tener la siguiente forma:

$$Máx_X\, U^{e} = (1-\pi).ln(W - \theta.X) + \pi.ln\left(W - \theta.X - \gamma.(W - X)\right)$$

Dado que se trata de un problema de optimización sin restricciones, la cantidad óptima debe satisfacer la siguiente condición de primer orden:

$$\frac{\partial U^{e}}{\partial X} = -\frac{\theta.(1-\pi)}{W - \theta.X} + \frac{\pi.(\gamma - \theta)}{W - \theta.X - \gamma.(W - X)} = 0$$

Luego, al reordenar la condición de primer orden, se obtiene que:

$$\theta.(1-\pi).\left(W - \theta.X - \gamma.(W - X)\right) = \pi.(\gamma - \theta).(W - \theta.X)$$

Seguidamente, el monto reportado es:

$$X = \frac{\left(\gamma.\theta - \theta^{2}\right) - \left((1-\theta).(\theta - \pi.\gamma)\right)}{\left(\gamma.\theta - \theta^{2}\right)}.W$$

El monto reportado por el individuo se incrementa con la penalización. En general, las derivadas parciales necesarias para ver los efectos de cambios en los parámetros del modelo son:

$$\frac{\partial X}{\partial \pi} = W.\gamma.\left(\frac{\theta - 1}{\theta^2 - \theta.\gamma}\right) > 0$$

$$\frac{\partial X}{\partial \gamma} = W.(\pi - 1).\left(\frac{\theta - 1}{(\theta - \gamma)^2}\right) > 0$$

$$\frac{\partial X}{\partial \theta} = -\left(\frac{W}{\theta^2.(\theta - \gamma)^2}\right).\left(\theta^2 + \pi.\gamma^2 - \theta^2.\gamma + \pi.\theta^2.\gamma - 2.\pi.\theta.\gamma\right) < 0$$

$$\frac{\partial X}{\partial W} = \left(\frac{1}{\theta^2 - \theta.\gamma}\right).\left(\theta - \pi.\gamma - \theta.\gamma + \pi.\theta.\gamma\right)$$

Con la especificación asumida se obtiene que mientras mayores sean la probabilidad de ser sujeto de investigación π y la tasa de penalidad γ, mayor es el ingreso reportado X y, por ende, menor será la evasión tributaria. Esto es consistente con los esfuerzos de las agencias de tributación de tener *ex ante* esquemas de detección de evasión cada vez más eficaces y *ex post* esquemas de penalidades muy punitivos. De otro lado, la tercera ecuación muestra que mientras mayor es la tasa impositiva θ menor es la riqueza reportada X, mientras que la cuarta ecuación muestra que el efecto sobre la evasión del monto de riqueza total W es ambiguo y depende del resto de parámetros. En el siguiente capítulo se mostrará que este efecto depende del grado de aversión al riesgo del individuo.

2.4. Proyecciones de la utilidad esperada

La utilidad esperada es una función que depende de las preferencias sobre los consumos (c) y del vector de probabilidades (π):

$$U^e = \sum_{i=1}^{N} \pi_i . v(c_i)$$

Por lo tanto, puede ser proyectada en el espacio de los consumos y en el espacio de las probabilidades. Estudiaremos estas proyecciones en esta sección.

2.4.1. Proyecciones en el espacio de los consumos contingentes

Por simplicidad consideremos un escenario en el que existen únicamente dos pagos posibles, c_1 y c_2. En este caso podemos arribar a una representación gráfica de la proyección de la utilidad esperada en un espacio bidimensional tal que en cada eje se midan los consumos contingentes. La función de utilidad esperada en este escenario sigue la siguiente formulación:

$$U^e = \pi_1 . v(c_1) + \pi_2 . v(c_2)$$

Las curvas de indiferencia en esta situación de incertidumbre (aquellas combinaciones de pagos que nos reportan el mismo nivel de utilidad esperada) pueden ser obtenidas al igualar el diferencial de la función de utilidad esperada a 0:

$$dU^e = \pi_1 . v'(c_1) . dc_1 + \pi_2 . v'(c_2) . dc_2 = 0$$

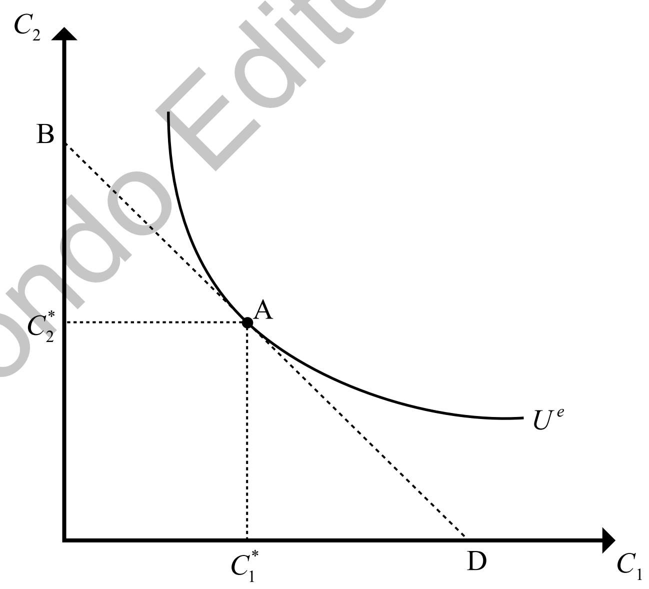
Si despejamos, se obtiene la tasa marginal de sustitución entre c_1 y c_2:

$$TMS \equiv -\frac{dc_2}{dc_1} = \frac{\pi_1 . v'(c_1)}{\pi_2 . v'(c_2)}$$

El signo de la *TMS* significa que hay una relación negativa entre los consumos en la curva de indiferencia. Esto tiene bastante sentido porque un menor consumo en el estado dos debe ser compensado por un mayor consumo en el estado uno para mantener el mismo nivel de utilidad.

De otro lado, el signo de la relación entre los consumos contingentes y la *TMS* depende de la forma de la función de utilidad elemental $v(c)$. Si la función es cóncava, entonces la utilidad marginal es decreciente y, por lo tanto, si se incrementa el consumo c_1 y se reduce el consumo de c_2 de tal manera que la utilidad esperada permanezca constante, la *TMS* será también decreciente. La figura 1 muestra la proyección de un determinado nivel de utilidad esperada en el espacio de los consumos. La curva denotada por U^e representa todas las combinaciones posibles de consumo en ambos estados que nos reportan la misma utilidad esperada.

Figura 1. Elección óptima de consumo



Si se considera una situación en la que el individuo debe escoger *ex ante* entre las distintas combinaciones de consumos que corresponden a cada estado de la naturaleza, el análisis gráfico del problema en un escenario de incertidumbre es, de alguna manera, similar al problema del individuo en la teoría microeconómica estándar del consumidor. La existencia de una restricción presupuestal puede resultar, por ejemplo, de una dotación inicial de consumos contingentes valorados a precios de mercado[7]. Sin embargo, es importante enfatizar que únicamente uno de los estados de la naturaleza será observado *ex post*, por lo que únicamente tendrá lugar uno de los consumos. La elección consiste, por lo tanto, en escoger *ex ante* lo que se consumirá en distintos estados de la naturaleza sabiendo que solo uno de ellos ocurrirá.

Como se aprecia en la figura 1, la recta presupuestal $\overline{BD}$ acota las combinaciones de consumos contingentes a las cuales un individuo puede acceder como consumidor. Es sobre esta recta que se encuentra la combinación de consumos contingentes que maximiza el bienestar del consumidor. Si la función de utilidad elemental es cóncava, entonces el individuo optimizará su bienestar en el punto A, donde se obtiene la mayor utilidad posible dada la restricción presupuestaria. Así, la condición de tangencia entre la recta $\overline{BD}$ y la curva de indiferencia U^e define la canasta de consumos contingentes que maximiza el nivel de utilidad esperada.

2.4.2. Proyecciones en el espacio de las probabilidades

Para proyectar la función de utilidad esperada en el espacio de las probabilidades podemos utilizar los denominados triángulos de Machina. Sean c_1, c_2 y c_3 los pagos que corresponden a la realización de los distintos estados de la naturaleza de un evento incierto, tal que $c_1 < c_2 < c_3$

7 Este problema se desarrollará más detalladamente en la sección 4.1.

y que la suma delas probabilidades asociadas a dichos pagos, π_1, π_2 y π_3, sea la unidad:

$$\pi_1 + \pi_2 + \pi_3 = 1$$

Así, el espacio de las probabilidades será la zona determinada por esta suma. Esta restricción en R^3 puede ser transformada en una restricción en dos dimensiones definida únicamente por dos de estas probabilidades. Así, si se despeja π_2 se obtiene:

$$\pi_2 = 1 - \pi_1 - \pi_3$$

Si se reemplaza esto en la función de utilidad esperada, se obtiene:

$$U^e = \pi_1.v(c_1) + \pi_2.v(c_2) + \pi_3.v(c_3)$$

$$U^e = \pi_1.v(c_1) + (1 - \pi_1 - \pi_3).v(c_2) + \pi_3.v(c_3)$$

$$U^e = v(c_2) + \pi_3\left[v(c_3) - v(c_2)\right] - \pi_1\left[v(c_2) - v(c_1)\right]$$

Luego, si se mantiene el nivel de utilidad constante y se diferencia respecto de las probabilidades, obtenemos la siguiente expresión:

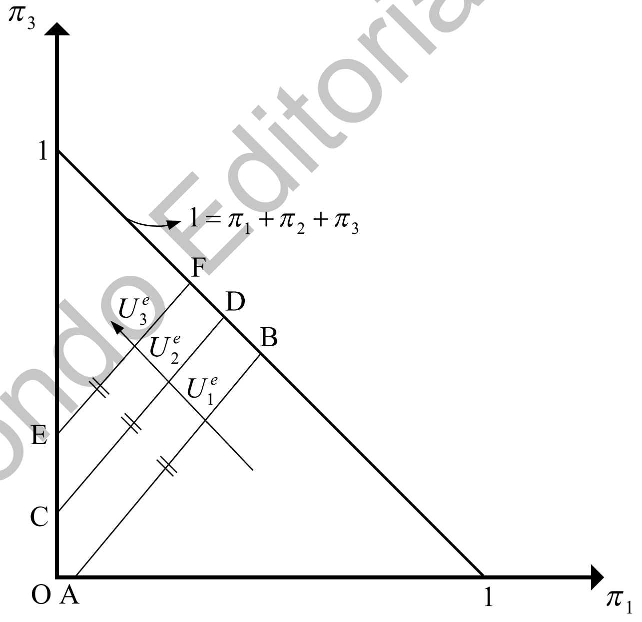
$$dU^e = 0 = d\pi_3\left[v(c_3) - v(c_2)\right] - d\pi_1\left[v(c_2) - v(c_1)\right]$$

Seguidamente, si despejamos y conformamos el ratio de los diferenciales de las probabilidades obtenemos la pendiente de las curvas de indiferencia sobre las cuales la utilidad esperada de los pagos permanece constante ante cambios en la distribución de probabilidades:

$$\frac{d\pi_3}{d\pi_1} = \frac{\left[v(c_2) - v(c_1)\right]}{\left[v(c_3) - v(c_2)\right]}$$

Este resultado nos indica que la tasa marginal de sustitución es positiva, constante y proporcional a la diferencia de utilidades. Por lo tanto, las proyecciones de la utilidad esperada en el espacio de las probabilidades son líneas rectas de pendiente positiva. La *TMS* será mayor cuanto mayor sea la diferencia entre las utilidades de los consumos 2 y 1 y menor sea la diferencia entre las utilidades de los consumos 3 y 2. Si además se cumple que la diferencia entre las utilidades de los consumos 2 y 1 es mayor que la diferencia entre las utilidades de los consumos 3 y 2, entonces la TMS será mayor a 1. Como veremos más adelante, esto ocurre cuando el individuo es adverso al riesgo.

Figura 2. Curvas de indiferencia en espacio de probabilidades



La relación entre los cambios de las probabilidades π_1 y π_3 es positiva porque un individuo solo permanecerá indiferente a cambios en la distribución de probabilidades si la mayor probabilidad de obtener el menor consumo (c_1) es compensada con un aumento en la probabilidad de obtener el mayor consumo. En la figura 2 se muestra la proyección de la utilidad esperada en el espacio de las probabilidades π_1 y π_3 para tres niveles distintos de utilidad, U_1^e, U_2^e y U_3^e. Cada proyección o curva de indiferencia es una línea recta con pendiente positiva constante, dadas las características de la *TMS*. La restricción de que la suma de probabilidades sea uno determina que el área de análisis relevante sea el triángulo delimitado por los interceptos de la recta que representan las distintas combinaciones para las que se satisface que $\pi_1 + \pi_3 = 1$ con los ejes que representan el valor de estas probabilidades.

Cada punto en este triángulo es una combinación de probabilidades. En el origen (punto O de la figura 2) la distribución de probabilidades es tal que: $\pi_2 = 1$ y $\pi_1 = \pi_3 = 0$, pues, por definición, en este punto las variables que se miden en los ejes tienen valor nulo. A lo largo del eje horizontal solo existen combinaciones de π_1 y π_2, dado que π_3 es 0 en dicho eje. Asimismo, en cualquier punto sobre el eje vertical solo existen combinaciones de π_2 y π_3 con valores positivos dado que en este eje π_1 es igual a 0. En todo el espacio interior del triángulo las tres probabilidades tienen valores distintos de 0.

En la figura 2 también se observa que la utilidad crece en la dirección de la probabilidad π_3 y alcanza su máximo valor cuando $\pi_3 = 1$ (esto sucede cuando el mayor pago ocurre con probabilidad 1). Las tres curvas de indiferencia representadas en el espacio de probabilidades, $\overline{AB}$, $\overline{CD}$ y $\overline{EF}$, se ordenan de tal manera que las distribuciones de probabilidades contenidas en $\overline{CD}$ son preferidas a aquellas contenidas en $\overline{AB}$ y la curva de indiferencia representada por $\overline{CD}$ es preferida a la representada por $\overline{AB}$; equivalentemente $\overline{EF}$ reportará mayor utilidad esperada de las tres pues es la más próxima a valores altos de π_3.

Es importante notar que un individuo tiene curvas de indiferencia más empinadas cuando la utilidad elemental es cóncava, tal como se trata con más detalle en la siguiente sección, esto corresponde a un individuo averso al riesgo. De este modo, sobre el supuesto de que c_1, c_2 y c_3 son valores fijos, en la figura 3 se observa que la diferencia de utilidades $v(c_2) - v(c_1)$ es siempre menor para un individuo con curva de utilidad convexa, lo que corresponde en la literatura al caso de un individuo bastante dispuesto a tomar riesgos o «amante del riesgo». En este mismo sentido, la diferencia de utilidades $v(c_3) - v(c_2)$ es siempre mayor para un individuo con utilidad convexa, lo que confirma las características de un individuo amante del riesgo de valorar poco las pérdidas extremas y apreciar mucho las mayores ganancias.

La explicación de este rasgo de las preferencias resumidas por una función cóncava es que los individuos aversos al riesgo sufren una considerable pérdida de utilidad en los escenarios de bajo consumo, como es, en la figura 3, el consumo c_1. Ambas características se refuerzan para mostrar que la tasa marginal de sustitución de un individuo amante al riesgo es mucho menor que aquella del individuo averso al riesgo. En otras palabras, en el espacio de las probabilidades, las curvas de utilidad del individuo averso al riesgo serán más empinadas que aquellas que representan al individuo amante del riesgo.

Figura 3. Utilidad elemental y actitud hacia el riesgo

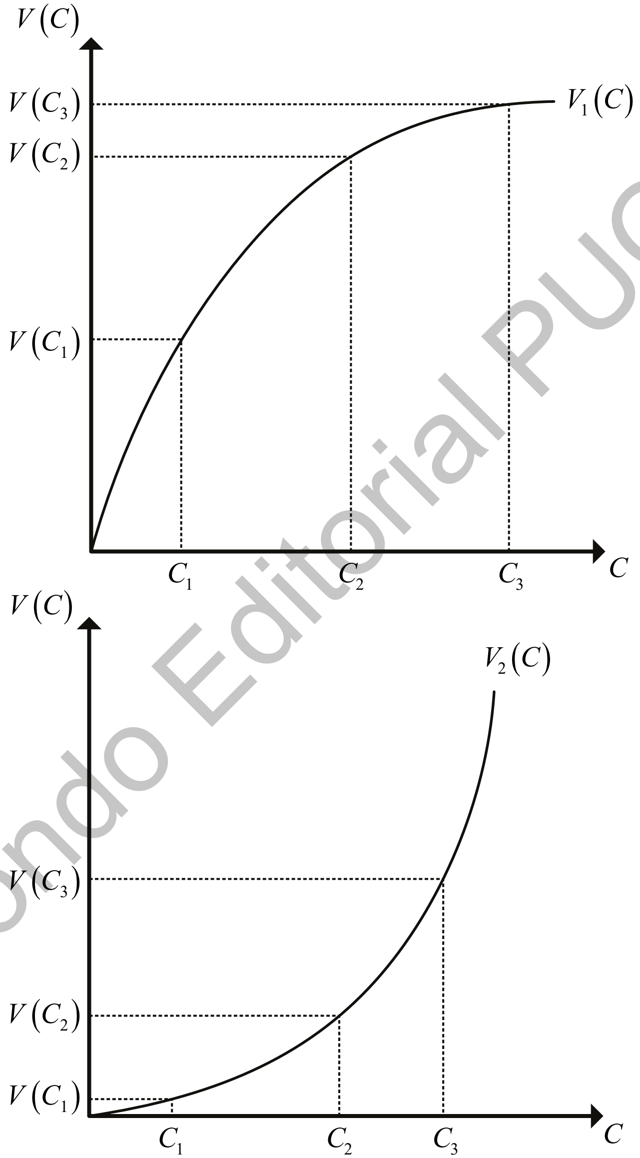
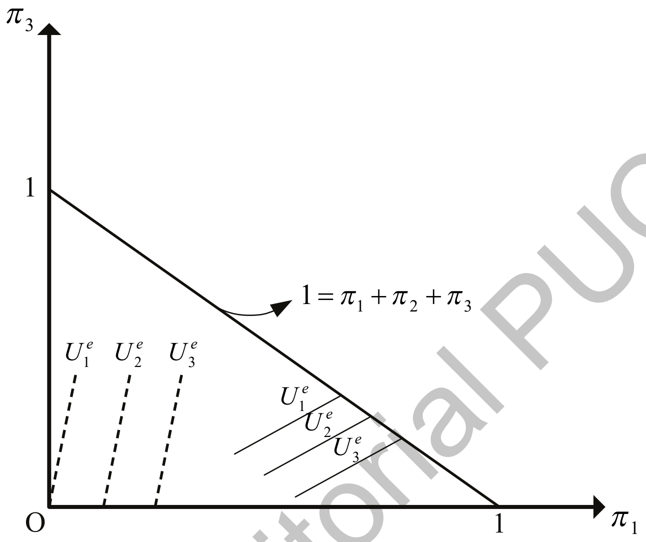


Figura 4. Aversión al riesgo y curvas de utilidad en espacio de probabilidades



En la figura 4 se contrastan las curvas de indiferencia de individuos con diferente grado de aversión al riesgo con dos familias de curvas, una con proyecciones más empinadas y otra con proyecciones más inclinadas. Más específicamente, un individuo averso al riesgo tiene las curvas de indiferencia representadas por las líneas punteadas, que, como se puede observar, son más empinadas que aquellas que representan al individuo amante del riesgo —las líneas continuas—. La intuición detrás del resultado observado es que para un individuo averso al riesgo, temeroso de un bajo consumo, mantener la utilidad esperada constante a medida que aumenta π_1 requiere de un mayor incremento de π_3 en relación a un individuo menos averso al riesgo. En otras palabras, necesita que el pago alto tenga una mayor probabilidad.

2.5. Críticas al enfoque de utilidad esperada

En esta sección se presentan algunas críticas al enfoque de utilidad esperada que provienen de reconocidos economistas. Los casos escogidos son la paradoja de Maurice Allais, punto focal en numerosos textos de la crítica al enfoque, algunos de los varios resultados de los estudios aplicados de Daniel Kahneman y Amos Tversky (1979), así como contribuciones más recientes como O'Donoghue y Rabin (1999).

2.5.1. La paradoja de Allais

La utilidad esperada ha recibido importantes críticas a lo largo del tiempo. Una de las más importantes observaciones es la denominada paradoja de Allais. Esta paradoja se desprende de la observación de elecciones de individuos que son inconsistentes con el enfoque (Machina, 1987). En el ejemplo típico se consideran las siguientes opciones *A*, *B*, *C* y *D* con los siguientes pagos:

- Si elige el evento *A* recibe:
  - S/ 1 000 000 con probabilidad 1
- Si elige el evento *B* recibe:
  - S/ 5 000 000 con probabilidad 0.10
  - S/ 1 000 000 con probabilidad 0.89
  - S/ 0 con probabilidad 0.01
- Si elige el evento *C* recibe:
  - S/ 1 000 000 con probabilidad 0.11
  - S/ 0 con probabilidad 0.89
- Si elige el evento *D* recibe:
  - S/ 5 000 000 con probabilidad 0.10
  - S/ 0 con probabilidad 0.90.

De esta forma, cuando se les da a escoger entre las opciones *A* y *B*, los individuos tienden a elegir el evento que les proporciona un pago seguro, es decir, el evento *A* (nótese que el valor esperado es menor en *A* que en el *B*). Asimismo, cuando a estos mismos individuos se les ofrece los planes *C* y *D*, entonces prefieren *D*. Más formalmente, si *A* resulta preferida a *B*, entonces:

$$v(c_2) \succcurlyeq 0.01.v(c_1) + 0.89.v(c_2) + 0.10.v(c_3)$$

Este resultado es equivalente a afirmar que:

$$0.11.v(c_2) \succcurlyeq 0.01.v(c_1) + 0.10.v(c_3)$$

De otro lado, si sumamos a ambos lados $0.89\,v(c_1)$ para obtener la utilidad esperada asociada al evento *C* del lado izquierdo, llegamos a la siguiente expresión:

$$0.89.v(c_1) + 0.11.v(c_2) \succcurlyeq 0.01.v(c_1) + 0.89.v(c_1) + 0.10.v(c_3)$$

$$0.89.v(c_1) + 0.11.v(c_2) \succcurlyeq 0.90.v(c_1) + 0.10.v(c_3)$$

Esta última expresión nos dice que un individuo cuyas decisiones sean consistentes con la propiedad de la utilidad esperada preferirá las combinaciones de pagos y probabilidades asociadas a *C* en lugar de las combinaciones de pagos y probabilidades asociadas a *D*. No obstante, la evidencia empírica sugiere lo contrario, de lo cual se concluye que la elección de los individuos al menos en este caso es inconsistente con esta propiedad de utilidad esperada. Para analizar gráficamente estos comportamientos representaremos estas opciones riesgosas en los «triángulos de Machina».

- **El problema del deslizamiento de las curvas de indiferencia (*fanning out*)**

La proyección de la utilidad esperada en el espacio de las probabilidades permite elaborar una ilustración grafica de la paradoja de Allais. En esta perspectiva, nótese que en las opciones A, B, C y D descritas previamente, los consumos permanecen constantes, es decir, los pagos implícitos en las elecciones son las mismos: 0, 1 millón y 5 millones (c_1, c_2 y c_3 respectivamente), pero cambia la distribución de probabilidades asociada a cada pago; de ahí la idoneidad de los triángulos.

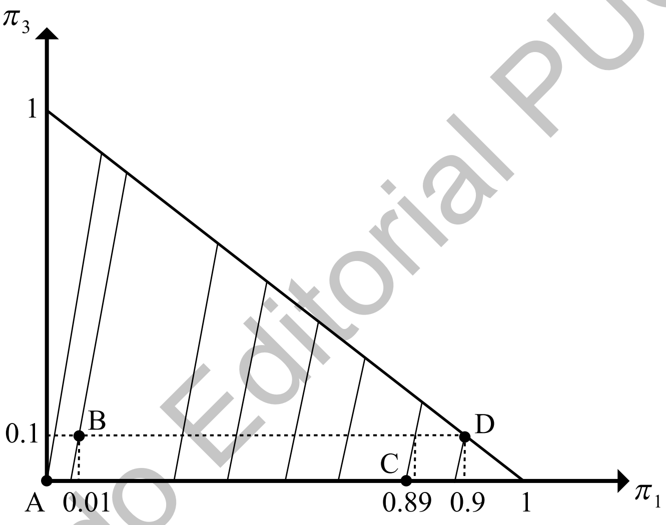
En la tabla 3 se ha esquematizado la distribución de probabilidades para cada uno de los tres pagos bajo cada una de las cuatro alternativas. Con la opción A, el individuo obtiene 1 millón de manera segura. Bajo la opción B, los tres pagos tienen probabilidad de ocurrencia positiva. Bajo la opción C, solo los dos pagos más bajos exhiben probabilidad positiva. Finalmente, bajo la alternativa D, los pagos que exhiben una probabilidad positiva de ocurrencia son el menor y el mayor.

Tabla 3. Probabilidad de ocurrencia de cada pago en la paradoja de Allais

	$c_1 = 0$	$c_2 = 1\ 000\ 000$	$c_3 = 5\ 000\ 000$
Evento A	0.00	1.00	0.00
Evento B	0.01	0.89	0.10
Evento C	0.89	0.11	0.00
Evento D	0.90	0.00	0.10

Sea π_1 la probabilidad de recibir 0 millones, π_2 la probabilidad de recibir 1 millón y π_3 la probabilidad de recibir 5 millones. Podemos observar más nítidamente la elección si representamos estas combinaciones de pagos y probabilidades de ocurrencia en los triángulos de Machina. La primera opción es representada por el punto A situado en el origen de la figura 5, donde $c_2 = 1$ millón ocurre con probabilidad $\pi_2 = 1$ (nótese que en este punto $c_1 = 0$ millones y $c_3 = 5$ millones ocurren con probabilidad 0, es decir $\pi_1 = \pi_3 = 0$). El segundo evento es representado por el punto *B* de la figura, donde la probabilidad π_2 se reduce a 0.89 y las otras probabilidades se incrementan, π_1 a 0.01 y π_3 a 0.10 (nótese que *B* es un punto interior del triángulo, pues $\pi_2 > 0$ bajo esta lotería).

Figura 5. Opciones en la paradoja de Allais



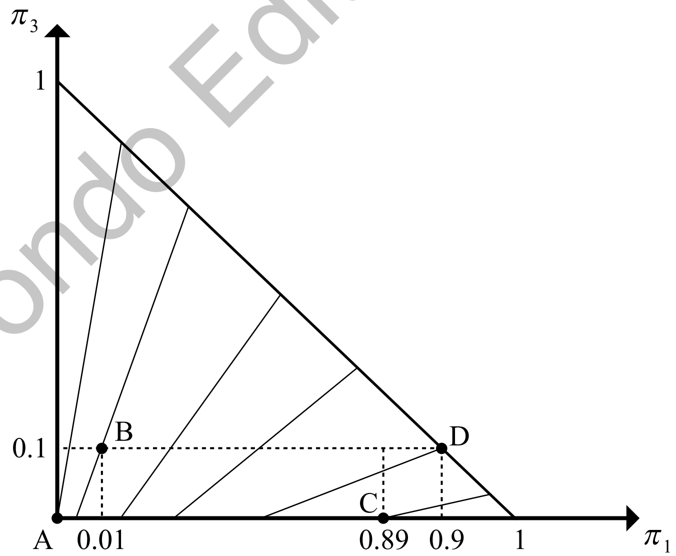
Análogamente, los puntos *C* y *D* en la figura muestran las combinaciones de probabilidades que definen a dichas loterías: $\pi_1 = 0.89$, $\pi_2 = 0.11$ y $\pi_3 = 0$ para *C*, en el eje horizontal, mientras que $\pi_1 = 0.90$, $\pi_2 = 0$ y $\pi_3 = 0.10$ para *D*. Como en el caso de la alternativa *D*, la probabilidad de recibir 1 millón es 0, esta opción se encuentra en el segmento que une las probabilidades unitarias de recibir los pagos c_1 y c_3.

En la figura 5 se puede apreciar por qué las elecciones de los individuos son inconsistentes con la teoría de la utilidad esperada.

Como se vio previamente, la proyección de la utilidad esperada en el espacio de probabilidades es tal que las curvas de indiferencia que reflejan distintos niveles de bienestar son paralelas, el nivel de utilidad aumenta a medida que π_3 (la probabilidad asociada al mayor pago) se aproxima a 1. Por lo tanto, si *A* pertenece a una curva de indiferencia de mayor nivel que *B* entonces *C* debe pertenecer a una curva de indiferencia de mayor nivel que *D*.

Una posible explicación de por qué los individuos prefieren la opción *D* a la opción *C* sería que la tasa marginal de sustitución y la aversión al riesgo sean cambiantes, de modo que las curvas de indiferencia se deslicen como se muestra en la figura 6. Sin embargo, este comportamiento es inconsistente con la utilidad esperada, que genera proyecciones paralelas (tasa marginal de sustitución constante) en el espacio de las probabilidades.

Figura 6. Curvas de indiferencia que se deslizan y la paradoja de Allais



2.5.2. Aportes de la economía conductual

El programa de investigación de Daniel Kahneman y Amos Tversky ha permitido entender los límites de la teoría desarrollada en este libro. En su contribución de 1979, estos autores realizaron una serie de experimentos aleatorios en los que exponen a diferentes individuos a escenarios hipotéticos de toma de decisiones bajo riesgo.

Los autores encuentran que los individuos tienden a sobrestimar resultados que son casi seguros en relación a aquellos resultados que son simplemente probables. En otras palabras, existe cierto patrón psicológico que no es capturado por la utilidad elemental y que está relacionado al efecto que tiene la probabilidad de ocurrencia del resultado en la utilidad que le reporta este último al individuo. A esta característica los autores la llaman «el efecto certeza».

Por otro lado, cuando las decisiones bajo incertidumbre se dan sobre ganancias, entonces los individuos tienen un patrón de conducta descrito por la aversión al riesgo, es decir, buscan los resultados más probables, aunque estos no sean los de mayor retorno. Sin embargo, cuando las decisiones bajo incertidumbre están relacionadas a posibles pérdidas, dicho patrón se revierte y los individuos buscan alternativas con mayores pérdidas, pero que son muy poco probables en comparación con pequeñas pérdidas que son casi seguras. Por ende, podemos sintetizar ambas conductas como una aversión a la pérdida.

Asimismo, cuando los individuos son expuestos a decisiones compuestas, como por ejemplo loterías en dos etapas, los individuos tienden a ignorar aquellos elementos comunes entre las dos loterías y centrar su atención en los elementos que las distinguen. Sin embargo, la distinción entre lo que es común y distinto entre las loterías es muy variable, y esto puede traer consecuencias en la consistencia de las preferencias.

Esta característica critica la sintetización de loterías compuestas en loterías simples, como lo hace la teoría de la utilidad esperada.

A partir de las críticas realizadas al enfoque de utilidad esperada se entiende la necesidad de la investigación aplicada del comportamiento, así como de nuevos intentos de formalizar o teorizar sobre la toma de decisiones en contextos de incertidumbre. Aportes sustantivos se han sumado gradualmente por numerosos autores: Thaler y Shefrin (1981), Akerlof (1991), Laibson (1997), O'Donoghue y Rabin (1999).

Por ejemplo, en su artículo de 1999, O'Donoghue y Rabin presentan una nueva crítica al enfoque de utilidad esperada que considera la impaciencia de los individuos, en particular la tendencia a privilegiar o disfrutar los premios o recompensas pronto y postergar o rezagar los costos. Esto puede significar, en términos económicos, privilegiar el consumo y postergar el ahorro o la inversión.

El enfoque tradicional de la utilidad esperada entiende el comportamiento del individuo en un contexto intertemporal, y, en dicha formalización estándar del comportamiento intertemporal, la impaciencia es capturada por un factor de descuento fijo en el tiempo (hay consistencia dinámica). Frente a esto, los autores observan que dicha formulación no recoge rasgos del comportamiento humano, más específicamente, que no recoge la tendencia humana a la denominada procrastinación (existencia de preferencias sesgadas hacia el presente o *present-bias preferences*). Desde esta perspectiva, en las decisiones de consumo entre dos momentos futuros, el individuo tiende a ponderar más el momento más cercano a medida que este se hace más próximo; por lo tanto concluyen que hay inconsistencia dinámica.

Este aporte ha permitido entender mejor diversos problemas que habían permanecido sin solución por décadas. Un ejemplo, señalado en la introducción de este texto, es el trabajo de Duflo, Kremer y Robinson (2010), quienes encuentran en la tendencia a la procrastinación una explicación, adicional a las aportadas por otros economistas, de por qué los productores agrícolas no utilizan insumos que pueden incrementar su productividad y bienestar futuro, a pesar de que conocen los potenciales efectos de los fertilizantes.

Capítulo 3
Aversión al riesgo

La aversión al riesgo es una característica del comportamiento de los individuos en un contexto de incertidumbre. Se dice que un individuo es averso al riesgo en un contexto de incertidumbre cuando la utilidad del ingreso esperado de un evento riesgoso es mayor que la esperada de dicho evento riesgoso[1].

Supongamos que la remuneración de un empleado de una sección de ventas depende de la demanda del mes. Cuando esta es alta, su ingreso asciende a S/ 1600, pero cuando la demanda es baja, su ingreso cae a S/ 400 mensuales. Si la probabilidad de que en un mes cualquiera la demanda sea alta es de 50% (digamos que, de los últimos 60 meses, unos 30 fueron de demanda alta), tenemos que el ingreso esperado del trabajador asciende a S/ 1000. Entonces, este trabajador será averso al riesgo si prefiere recibir S/ 1000 de manera segura (ganar siempre esta cantidad) que ganar aleatoriamente esa cantidad con S/ 1600 la mitad de las veces y S/ 400 la otra mitad. Como veremos en esta sección, este tipo de preferencias son consistentes con una función de utilidad cóncava.

[1] Kreps (1990, p. 82) explica que un individuo es averso al riesgo si prefiere estrictamente una consecuencia con seguridad a cualquier otro prospecto riesgoso cuya esperanza matemática iguale dicho pago. Si sus preferencias van en el sentido contrario, entonces el individuo es amante del riesgo; y si es indiferente entre recibir el pago con seguridad y dicho prospecto riesgoso, entonces es neutral al riesgo.

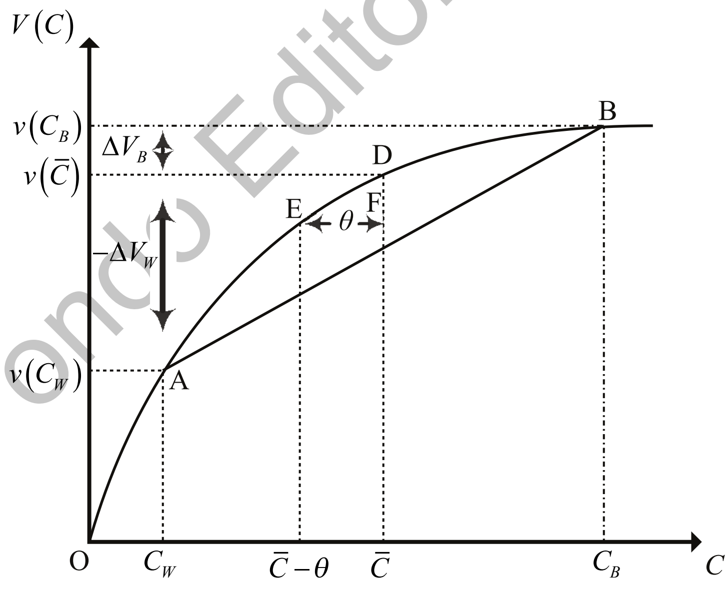
3.1. Distintas maneras de entender la aversión al riesgo

Un individuo es, entonces, averso al riesgo si prefiere una cantidad dada de manera segura que una lotería cuyo valor esperado sea igual a dicha cantidad. Formalmente, es un individuo que prefiere la utilidad del valor esperado de una determinada lotería al valor esperado de la utilidad o utilidad esperada:

$$E\{v(c)\} < v(E\{c\})$$

Existen varias intuiciones asociadas a la definición de aversión al riesgo. Se pueden describir varias formas alternativas de aproximarnos a este importante concepto. En la figura 7 se presenta la función de utilidad elemental de un individuo que puede tener un consumo.

Figura 7. Medición de la aversión al riesgo



Un individuo averso al riesgo es un individuo cuya función de utilidad elemental, $v(c)$, es cóncava, lo que equivale a afirmar que la utilidad marginal del consumo es decreciente. Más aún, cuanto más cóncava sea la función de utilidad, mayor será la aversión al riesgo del individuo. Las condiciones de concavidad están dadas por las siguientes inecuaciones:

$$v'(c) > 0$$

$$v''(c) < 0$$

Una aproximación alternativa está dada por su disposición a aceptar juegos justos. Un individuo averso al riesgo no acepta juegos justos, es decir, no acepta participar en juegos en los que la esperanza matemática de las ganancias (pérdidas) sea igual a 0[2]. La intuición detrás es que, ante un evento riesgoso, un individuo averso al riesgo les asignará un mayor peso a las pérdidas que a las ganancias, aun cuando estas sean de la misma magnitud en valor esperado. Esto es así porque, en términos de sus preferencias, las potenciales ganancias de utilidad son menores que las potenciales pérdidas de utilidad:

$$\Delta v_B < \left|-\Delta v_w\right|$$

Por ejemplo, en el caso del trabajador que compara ganar S/ 1000 siempre con ganar S/ 1600 con probabilidad de 50% y ganar S/ 400 con la probabilidad de 50%, el cambio en la utilidad derivado de la ganancia $\left(\text{v}(1600) - \text{v}(1000)\right)$ es menor que el cambio en la utilidad derivado de la pérdida $\left(\text{v}(1000) - \text{v}(400)\right)$.

2 Un juego justo es un juego que genera la misma ganancia o pérdida en valor esperado. Son ejemplos un juego en el que se gana 100 con probabilidad 1/2 y se pierde 100 con probabilidad 1/2 o un juego en el que se recibe 100 con probabilidad 2/3 y se pierde 200 con probabilidad 1/3.

Una última aproximación está dada por la disposición del individuo a pagar un seguro para evitar el riesgo. Un individuo averso al riesgo estará dispuesto a pagar una cantidad extra θ para tener un consumo seguro. Esta cantidad es denominada el «costo de riesgo» o la «prima de riesgo» y se define como la cantidad de dinero que sustraída al ingreso esperado es equivalente a la utilidad esperada:

$$U^e = v(\mu - \theta); U^e = \sum \pi_i v(c_i)$$

Para ilustrar esta última manera de ver la aversión al riesgo consideremos dos ejemplos:

- **Ejemplo 1**

Retomemos el ejemplo de la fuerza de venta. Consideremos el caso de una empresa en la que cada trabajador recibe un pago mensual en función del valor de las ventas mensuales. Se sabe que con probabilidad 1/2 se producen ventas altas y el trabajador recibe S/ 1600 y con probabilidad 1/2 las ventas son bajas y cada trabajador recibe S/ 400. El ingreso esperado del trabajador en estas condiciones será de S/ 1000:

$$VE = 1/2\ (1600) + 1/2\ (400) = 1000$$

Un individuo averso al riesgo preferirá un sueldo seguro de S/ 1000 que una lotería con un ingreso esperado similar. Más aún, el individuo averso al riesgo inclusive está dispuesto a aceptar un sueldo mensual algo menor, siempre que este sea un ingreso seguro. En este escenario el empleador puede optar por asumir el riesgo de las fluctuaciones de las ventas y pagarle al trabajador una suma fija menor a S/ 1000, y cobra de esta manera una «prima por seguro»[3].

[3] Un resultado de la teoría de la incertidumbre es que un empleador, cuando es neutral al riesgo, maximiza sus beneficios si asegura perfectamente al trabajador.

Para ilustrar este punto obtengamos la suma mensual. El empleador debe preguntarse cuánto estará dispuesto a aceptar el individuo para evitar el riesgo asociado a la fluctuación de las ventas. Para ello asumamos que la función de utilidad del individuo es $v(c) = c^{1/2}$, la cantidad θ que el trabajador estará dispuesto a sacrificar como máximo será aquella que le dé como utilidad segura lo mismo que la utilidad esperada:

$$\frac{1}{2}v(1600) + \frac{1}{2}v(400) = v(1000 - \theta)$$

Al resolver, tenemos:

$$\frac{1}{2}1600^{1/2} + \frac{1}{2}400^{1/2} = (1000 - \theta)^{1/2}$$

$$900 = 1000 - \theta$$

$$100 = \theta$$

El pago fijo mensual mínimo que el individuo estaría dispuesto a aceptar para evitar el riesgo asciende a S/ 900, lo que equivale a afirmar que $\theta =$ S/ 100 es lo máximo que estaría dispuesto a sacrificar. Entonces, para cualquier pago mensual mayor a S/ 900, el trabajador estará mejor que en la situación en la que recibe S/ 1000 de manera esperada. Desde la perspectiva del empleador, pagar menos de S/ 1000 le permite tener un premio por asumir el riesgo asociado a la fluctuación de las ventas.

- **Ejemplo 2**

Un segundo caso se refiere al monto máximo que un individuo está dispuesto a pagar por un seguro contra robos. Consideremos que el auto tiene un valor de S/ 100 y que puede sufrir un robo de S/ 36. Estos dos factores generan combinaciones de pagos y probabilidades, mostradas en la tabla 4, en las que el individuo puede optar entre asegurar su auto (acción A), lo que implica asignar un monto L a la compra del seguro, o no asegurarlo (acción $\sim A$), ante un posible robo (estado de la naturaleza R) que ocurrirá con probabilidad de 50%.

Tabla 4. Elementos de decisión en el caso de un seguro

Acción \ estados	R	$\sim R$
$\sim A$	64	100
A	$100 - L$	$100 - L$
Probabilidades	0.50	0.50

De otra parte, un asegurador monopólico puede desear saber cuál es el valor máximo que puede cobrar por un seguro (L). Para resolver este problema, el asegurador debe hallar el valor de L que hace que la utilidad esperada de no asegurarse sea igual a la utilidad con el seguro. Si la función de utilidad del individuo es nuevamente $v(c) = c^{1/2}$, tenemos:

$$U^e = \frac{1}{2}v(100) + \frac{1}{2}v(64) = v(100 - L)$$

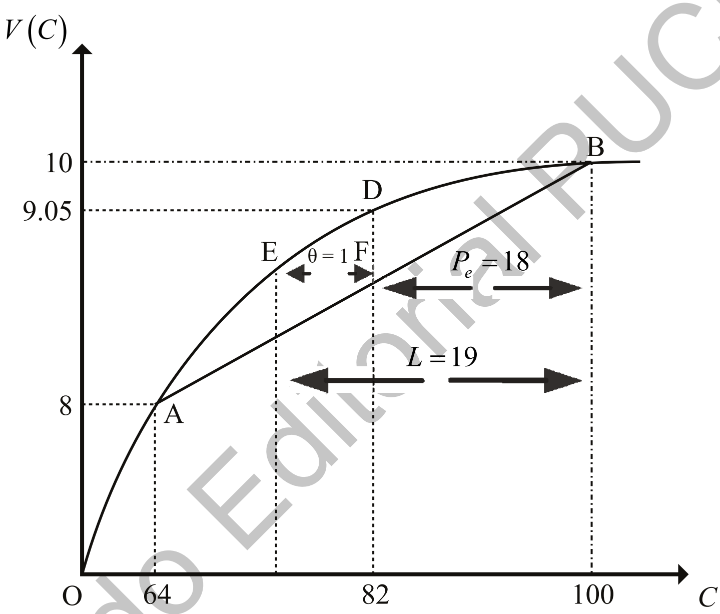
$$U^e = 9 = (100 - L)^{1/2}$$

$$L^* = 19$$

Nótese que la pérdida esperada por la aseguradora es (1/2)(100 − 64) = 18. En otras palabras, la aseguradora deberá reponer los S/ 36 robados con probabilidad de 0.50. Como el individuo es adverso al riesgo, está dispuesto a pagar S/ 19 por el seguro, pago que resulta ser un poco mayor a la pérdida esperada. Esto sugiere que la aversión al riesgo es el fundamento de la existencia del mercado de seguros.

Al hacer las cuentas globales, si el número de autos asegurados es 1000, entonces el costo esperado de asegurar será $500 \times 36 = 1800$, pero la aseguradora recibe $19 \times 1000 = 1900$. La diferencia es lo que los individuos están pagando para no tener riesgo en exceso del costo.

Figura 8. Aversión al riesgo y seguro



La figura 8 ilustra este ejemplo. Dada la forma funcional de la función de utilidad elemental, la utilidad esperada en caso de que el individuo no asegure el auto será igual a 9 (punto F). En el punto E se mide la utilidad segura que proporcionan los S/ 100 netos del costo del seguro cuando este asciende a S/ 19. El costo del seguro puede ser descompuesto en dos partes: el costo del servicio que asciende a S/ 18 y el monto en exceso sobre este costo que se origina en la aversión al riesgo del asegurado. Como consecuencia de esta característica, el individuo estará dispuesto a pagar una prima por encima de la pérdida esperada para evitar el riesgo de sufrir un asalto. Esto se debe a que la utilidad del valor esperado del evento incierto (punto *D*) es mayor a la utilidad esperada.

Una manera de notar que el pago de S/ 19 incorpora un componente de aversión al riesgo es considerar el caso en el que el individuo es neutral al riesgo. En este último caso pagaría como máximo S/ 18, es decir, el costo de reposición del robo. En este escenario el individuo tendría una función de utilidad elemental lineal, por lo que una ganancia de S/ 18 causaría un cambio en la utilidad igual en valor absoluto al cambio en la utilidad causado por una pérdida de S/ 18.

3.2. Medidas de aversión al riesgo

La aversión al riesgo naturalmente varía entre los individuos: desde individuos en los que dicha aversión es extrema hasta aquellos en los que se observa poca e inclusive ninguna aversión al riesgo. Por ello se ha desarrollado el concepto de medida de aversión al riesgo. No obstante, ¿cómo medir esta variable? Como se ha señalado, un individuo averso al riesgo se puede representar con una función de utilidad elemental cóncava. Como la utilidad marginal es decreciente para toda función cóncava y la mayor concavidad de la función indica un mayor grado de aversión, se utiliza el cambio de la utilidad marginal como medida:

$$\textit{Medida de aversión al riesgo} \rightarrow \frac{\partial\left(v'(c)\right)}{\partial c} = v''(c)$$

Más específicamente, cuanto más rápido caiga la utilidad marginal ante un incremento en el nivel de consumo o de ingresos, mayor es la segunda derivada de la función y más averso al riesgo es el individuo.

Esto significa también que los incrementos en la utilidad causados por resultados favorables son pequeños en relación a la disminución de la misma por resultados desfavorables. Un problema con esta medida, sin embargo, es que transformaciones afines a la función de utilidad causan cambios en la medida de aversión al riesgo, a pesar de que esta nueva función de utilidad represente las mismas preferencias que la función anterior. Por ello, una medida más razonable resulta de normalizar esta medida usando la primera derivada de la función de utilidad elemental. Esta nueva medida es conocida como la «medida de aversión al riesgo absoluta de Arrow-Pratt»[4], $A(c)$, que se define de la siguiente manera:

$$A(c) = -\frac{v''(c)}{v'(c)} \equiv \textit{Medida absoluta de aversión al riesgo}$$

Esta medida no es sensible a transformaciones afines de la función de utilidad. Nótese que sus fuentes de varianza provienen de las preferencias y de la riqueza de los individuos. En el caso de la riqueza, es interesante notar que los individuos con menor poder adquisitivo pueden mostrarse menos dispuestos a asumir riesgos respecto de individuos con más ingresos, no necesariamente porque sus preferencias frente al riesgo sean distintas, sino porque una pérdida determinada representa un mayor porcentaje de su riqueza inicial. Más aún, dados dos individuos, tal que uno de ellos tiene mayor nivel de ingresos que el otro, es posible que, si el individuo que inicialmente ostentaba una menor renta viera aumentar su riqueza hasta llegar al nivel de ingresos del individuo más acaudalado, se muestre dispuesto a asumir mayores riesgos que el individuo inicialmente más rico. Para corregir este problema e identificar individuos absolutamente más aversos al riesgo,

[4] Ver en Laffont (1989) la demostración del teorema de Pratt (1964), bajo el cual un individuo con función de utilidad elemental más cóncava tiene una mayor medida de aversión absoluta al riesgo.

pero que relativamente pueden ser menos aversos se emplea la medida relativa de aversión al riesgo de Arrow-Pratt, $R(c)$:

$$R(c) = -\frac{v''(c)}{v'(c)}c$$

El signo negativo que antecede a ambas medidas se emplea para facilitar la interpretación del resultado, de modo que un mayor valor de estas medidas identifique a un individuo más adverso al riesgo. Debe recordarse que una función cóncava es una función cuya primera derivada es positiva ($v'(c) > 0$) y cuya segunda derivada es siempre negativa ($v''(c) < 0$). Por lo tanto, es necesario considerar el negativo de la segunda derivada de la función de utilidad para tener una relación monótona.

- **Ejemplo 1**

Necesitamos obtener las medidas de aversión al riesgo absoluta $A(c)$ y relativa $R(c)$ de un individuo cuyas preferencias se encuentran representadas por la siguiente función de utilidad:

$$v(c) = c^{0.5}$$

Para hallar ambas medidas debemos empezar por calcular la primera y la segunda derivada de la función de utilidad:

$$v'(c) = 0.5c^{-0.5}$$

$$v''(c) = -0.25c^{-1.5}$$

Al reemplazar estos valores en las medidas de aversión al riesgo se obtiene:

$$A(c) = -\frac{\left(-0.25c^{-1.5}\right)}{0.5c^{-0.5}} = \frac{0.5}{c}$$

$$R(c) = -\frac{\left(-0.25c^{-1.5}\right)}{0.5c^{-0.5}}c = 0.5$$

En este caso, se dice que este individuo exhibe una aversión al riesgo absoluta decreciente y una aversión al riesgo relativa constante. Esto quiere decir que, a medida que su nivel de ingresos aumente, su aversión absoluta al riesgo será cada vez menor, pero sus preferencias relativas por el riesgo se mantendrán inalteradas. La intuición de tener estas dos medidas es que un individuo con menor riqueza puede exhibir mayor aversión al riesgo absoluta que otros individuos con mayor riqueza, exclusivamente como consecuencia de la diferencia de ingresos, por que es necesario comparar también las medidas de aversión al riesgo relativas. Si solo se midiese la aversión absoluta podría inferirse que los individuos con menores ingresos son siempre (esto es, para cualquier nivel de riqueza) muy aversos al riesgo.

- **Ejemplo 2**[5]

En el capítulo 2 se analizó el problema de la evasión tributaria y se encontró que cuando se asumen preferencias logarítmicas naturales en la función elemental, la decisión de subreportar menos ingresos está vinculada con la menor probabilidad de detección de esta práctica y la menor tasa de penalidad. Asimismo, la evasión será mayor cuanto mayor sea la tasa impositiva. Sin embargo, en esa sección la relación entre el monto declarado y la riqueza quedó indeterminado.

En general, para estudiar en qué dirección se altera la variable de decisión cuando se producen cambios marginales en las cuatro variables especificadas, Allingham y Sandmo utilizan los coeficientes de aversión al riesgo absoluto y relativo de Arrow-Pratt. Si se retoma el análisis

[5] Tomado de Allingham y Sandmo (1972).

del efecto de cambios en el nivel de riqueza sobre las decisiones de reporte y se utiliza la condición de primer orden, se diferencia la ecuación con respecto a la riqueza para obtener:

$$\frac{\partial X}{\partial W}=\frac{1}{D}.\left[(1-\pi).\theta.v''(W-\theta.X)\right.$$
$$\left.+\pi.(\theta-\gamma).(1-\gamma).v''\left(W-\theta.X-\gamma.(W-X)\right)\right]$$

Donde:

$$D=\theta^2.(1-\pi).v''(W-\theta.X)$$
$$+(\gamma-\theta)^2.\pi.v''\left(W-\theta.X-\gamma.(W-X)\right)<0$$

Seguidamente, al utilizar la condición de primer orden y reordenar se obtiene:

$$\frac{\partial X}{\partial W}=-\frac{1}{D}.(1-\pi).\theta.v'(W-\theta.X)\left[-\frac{v''(W-\theta.X)}{v'(W-\theta.X)}\right.$$
$$\left.+(1-\gamma)\frac{v''\left(W-\theta.X-\gamma.(W-X)\right)}{v'\left(W-\theta.X-\gamma.(W-X)\right)}\right]$$

Esta formulación nos permite expresar el efecto de un cambio marginal en la riqueza sobre X en términos del coeficiente de aversión al riesgo absoluto de Arrow-Pratt:

$$\frac{\partial X}{\partial W}=-\frac{1}{D}.(1-\pi).\theta.v'(W-\theta.X).\left[A(W-\theta.X)\right.$$
$$\left.-(1-\gamma).A\left(W-\theta.X-\gamma.(W-X)\right)\right]$$

Si se asume que el individuo tiene una función de aversión al riesgo absoluta decreciente en la riqueza[6], el signo de la relación dependerá del valor que tenga la tasa γ. Solo para valores altos de esta tasa (mayor a 1) el efecto sería claramente positivo y una mayor riqueza llevaría a una mayor evasión. Para una mejor interpretación del modelo, los autores analizan cómo varía la fracción reportada de la riqueza (X/W) cuando esta aumenta:

$$\frac{\partial(X/W)}{\partial W} = \frac{1}{W^2}.\frac{1}{D}.\big[(1-\pi).\theta.v''(W-\theta.X).(W-\theta.X)$$
$$+(\theta-\gamma).\pi.v''\big(W-\theta.X-\gamma.(W-X)\big).\big(W-\theta.X-\gamma.(W-X)\big)\big]$$

Si se usa la condición de primer orden, se puede expresar esta derivada en términos del coeficiente de aversión al riesgo relativo de Arrow-Pratt:

$$\frac{\partial(X/W)}{\partial W} = \frac{1}{W^2}.\frac{1}{D}.(1-\pi).\theta.v'(W-\theta.X).\big[R(W-\theta.X)$$
$$-R\big(W-\theta.X-\gamma.(W-X)\big)\big]$$

El signo dependerá de si la aversión relativa al riesgo es constante, creciente o decreciente en la riqueza neta de impuestos. Si la aversión al riesgo relativa es decreciente en la riqueza, la fracción declarada será también decreciente, lo que indica que el individuo consistente con sus preferencias toma mayores riesgos cuando es más rico.

En el capítulo 2, los resultados obtenidos dependen claramente del valor de los parámetros. Para tener un mejor análisis de los efectos

6 En siguientes secciones se explica qué implica este resultado sobre las preferencias del individuo.

de los parámetros se pueden obtener resultados para especificaciones más generales con las medidas de aversión al riesgo. En el caso de la tasa impositiva θ, el efecto de su incremento sobre el nivel de ingresos reportado depende de la aversión absoluta al riesgo:

$$\frac{\partial X}{\partial \theta} = \frac{1}{D}.X.(1-\pi).\theta.v'(W-\theta.X).\left[A(W-\theta.X) - A\big(W-\theta.X-\gamma.(W-X)\big)\right]$$

$$+\frac{1}{D}.\left[(1-\pi).v'(W-\theta.X) + \pi.v'\big(W-\theta.X-\gamma.(W-X)\big)\right]$$

Si se utiliza el supuesto de aversión absoluta al riesgo decreciente, entonces $A(W-\theta.X) < A\big(W-\theta.X-\gamma.(W-X)\big)$; en consecuencia, el signo final de la derivada será ambiguo pues el segundo término es negativo. Con el uso de los conceptos de efectos sustitución e ingreso se puede brindar una explicación intuitiva de por qué el efecto neto es indeterminado. Existen dos efectos que se contraponen cuando se asume que el individuo exhibe aversión absoluta al riesgo decreciente. Por un lado, una mayor tasa impositiva hace que sea más rentable ser evasor. De modo que, por efecto de sustitución, un aumento de θ genera una caída en el nivel de riqueza declarada. Por otro lado, un aumento en la tasa impositiva hace que el individuo tenga menos ingresos en ambos casos, por lo tanto, al suponer aversión al riesgo absoluta decreciente, el individuo preferirá no evadir.

En lo referente al efecto que tiene la magnitud de la penalización sobre la decisión de evasión se tiene:

$$\frac{\partial X}{\partial \gamma} = -\frac{1}{D}.(\theta-\gamma).(W-X).\pi.v''\big(W-\theta.X-\gamma.(W-X)\big)$$

$$-\frac{1}{D}.\pi.v'\big(W-\theta.X-\gamma.(W-X)\big)$$

Ambos términos son positivos, por lo tanto, un incremento en la penalización generará indefectiblemente un mayor reporte de la riqueza. Por último, en el caso de un incremento en la probabilidad de ser investigado se tiene:

$$\frac{\partial X}{\partial \pi} = \frac{1}{D}\left[-\theta.v'(W-X) + (\theta-\gamma).v'\left(W-\theta.X-\gamma.(W-X)\right)\right]$$

El efecto también es claramente positivo. Un incremento en la probabilidad de ser investigado desincentiva las decisiones de subreportar la riqueza a la entidad encargada de la recaudación.

3.3. Costo del riesgo

Como se ha definido previamente, un individuo averso al riesgo está dispuesto a pagar como máximo un monto θ para evitar el riesgo. A partir de la condición de indiferencia entre la utilidad esperada, U^e, de una lotería y la utilidad de un ingreso seguro, $v(\mu-\theta)$, en la que μ es el valor esperado de la lotería, podemos obtener una medida del costo del riesgo:

$$U^e = v(\mu-\theta)$$

Donde $U^e = \sum_{i=1}^{N} \pi_i.v(c_i)$ y el valor $\mu-\theta$ representa el nivel de ingreso seguro neto del costo del riesgo. Si aplicamos una expansión de Taylor en ambos lados de la ecuación en torno de μ (por conveniencia la expansión es de segundo grado en la utilidad esperada y de primer grado en el otro lado de la ecuación), se tiene que:

$$v(\mu) - \theta v'(\mu) \approx \sum_{i=1}^{N} \pi_i \left[v(\mu) + v'(\mu).\frac{(c_i-\mu)}{1!} + v^{''(\mu)}.\frac{(c_i-\mu)^2}{2!} + \ldots \right]$$

$$v(\mu)-\theta v'(\mu) \approx v(\mu)+v'(\mu).\underbrace{\sum_{i=1}^{N}\pi_i(c_i-\mu)}_{=0}+\frac{v''(\mu)}{2}.\underbrace{\sum_{i=1}^{N}\pi_i(c_i-\mu)^2}_{=\sigma^2}+\ldots$$

Luego, al aplicar las definiciones de media y varianza de la distribución, podemos simplificar la expresión anterior y obtener[7]:

$$\theta \approx -\frac{v''(\mu)}{v'(\mu)}.\left(\frac{\sigma^2}{2}\right)$$

Si empleamos la definición para la medida de aversión al riesgo absoluta, se llega a la siguiente expresión para el precio del riesgo:

$$\theta \approx A(\mu).\left(\frac{\sigma^2}{2}\right)$$

Esta expresión nos dice que el monto que el individuo está dispuesto a pagar para no tener riesgo depende de su grado de aversión absoluta al riesgo (que depende de sus preferencias y nivel de riqueza) y la varianza de los consumos. Nótese que cuando la varianza de los consumos es pequeña, inclusive individuos muy aversos al riesgo pueden pagar un monto bajo para evitar el riesgo. Inversamente, individuos poco aversos al riesgo pueden pagar un monto alto si la incertidumbre de los consumos es grande. Asimismo, un mismo individuo estará dispuesto a pagar una cantidad mayor cuanto mayor sea la varianza de los consumos. Si consideramos el ejemplo del ejecutivo de ventas de nuestro ejemplo, este tendrá la disponibilidad de pagar, por evitar el riesgo,

7 Ver en Laffont (1989) la demostración de que un individuo con una función de utilidad más cóncava está dispuesto a pagar un mayor monto para evitar el riesgo, según el resultado de Pratt (1964).

un monto mayor si los pagos contingentes son de S/ 1000 y S/ 2000, que si los montos son de S/ 400 y S/ 1600.

- **Ejemplo 3**[8]

Supongamos que un individuo enfrenta una lotería con dos tipos de riesgo para su consumo $(\tilde{c} = \tilde{w} + \tilde{e})$ y puede cubrir uno de ellos mediante la compra de un seguro. En la lotería, el ingreso w puede ser igual a w_1 con probabilidad π (supongamos que es un valor bajo causado por una recesión) e igual a w_2 con probabilidad $1-\pi$ (imaginemos que es un valor alto causado por un *boom*). Además, sabemos que e es igual a 0 cuando ocurre w_2, pero cuando sucede w_1, toma un valor de $-\varepsilon$ con probabilidad 50% (asumamos que recupera un conjunto de activos) y un valor ε con probabilidad 50% (pierde los activos). El costo del riesgo (θ) para e puede definirse a partir de:

$$E\left[u(w-\theta)\right] = E\left[u(w+e)\right]$$

Si existe un seguro contra el riesgo asociado al valor que tomará e, la expresión anterior puede plantearse como:

$$\pi.u(w_1-\theta)+(1-\pi).u(w_2-\theta)=\pi.u(w_1+e)+(1-\pi).u(w_2+e)$$

Al reemplazar las realizaciones de e, esta ecuación puede ser vista como:

$$\pi.u(w_1-\theta)+(1-\pi).u(w_2-\theta)=\pi.\left[\frac{1}{2}.u(w_1+\varepsilon)+\frac{1}{2}.u(w_1-\varepsilon)\right]$$
$$+(1-\pi).u(w_2)$$

[8] Tomado de Varian (1992).

Si aplicamos una expansión de Taylor de primer orden en el lado izquierdo de la expresión, tendremos:

$$\pi.\left[u(w_1)-\theta.u'(w_1)\right]+(1-\pi).\left[u(w_2)-\theta.u'(w_2)\right]$$

$$\pi.u(w_1)-\theta.\left[\pi.u'(w_1)+(1-\pi).u'(w_2)\right]+(1-\pi).u(w_2)$$

Luego, si se emplea una expansión de Taylor de segundo orden en el lado izquierdo de la expresión, tendremos:

$$\frac{\pi}{2}\left[u(w_1)+\varepsilon.u'(w_1)+\frac{1}{2}\varepsilon^2.u''(w_1)+u(w_1)-\varepsilon.u'(w_1)+\frac{1}{2}\varepsilon^2.u''(w_1)\right]$$
$$+(1-\pi).u(w_2)$$

Al simplificar la última expresión, tenemos que:

$$\pi.u(w_1)+\frac{1}{2}\pi.\varepsilon^2.u''(w_1)+(1-\pi).u(w_2)$$

Si juntamos ambos lados de la ecuación, se tiene, entonces, que:

$$\pi.u(w_1)-\theta.\left[\pi.u'(w_1)+(1-\pi).u'(w_2)\right]+(1-\pi).u(w_2)$$
$$\approx\pi.u(w_1)+\frac{1}{2}\pi.\varepsilon^2.u''(w_1)+(1-\pi).u(w_2)$$

$$\theta.\left[\pi.u'(w_1)+(1-\pi).u'(w_2)\right]\approx-\frac{1}{2}\pi.\varepsilon^2.u''(w_1)$$

$$\theta\approx\frac{-\frac{1}{2}\pi.\varepsilon^2.u''(w_1)}{\pi.u'(w_1)+(1-\pi).u'(w_2)}$$

El evento más severo para el individuo es la ocurrencia de una recesión y que, en medio de esta, se produzca una pérdida de activos. El monto máximo que un individuo está dispuesto a sacrificar para asegurarse de esta contingencia depende positivamente de la varianza de la variable *e* (magnitud de montos recuperados o perdidos de activos), de una expresión aproximada a la aversión absoluta al riesgo medida en el ingreso de la recesión y de la probabilidad de ocurrencia de la recesión, que es el estado de la naturaleza que impulsa la problemática de los activos.

Capítulo 4
Manejo de riesgos

En el manejo de riesgos un individuo tratará de mantener la misma riqueza en los distintos estados de la naturaleza en la medida en que esta pueda ser transferida entre estos estados. Esto no siempre es posible. Para ilustrar ambos puntos, el comportamiento de los individuos que busca manejar riesgos y las restricciones existentes, en este capítulo se presenta la exposición de Hirshleifer y Riley (1992), quienes desarrollan dos modelos de manejo de riesgos: uno basado en consumos contingentes para una situación ideal y otro realista basado en activos disponibles. Así, la sección 4.1 permite ver los rasgos esenciales del manejo de riesgos, mientras que la 4.2 nos da una aproximación de cómo se hace el manejo de riesgos realmente y de las restricciones que enfrenta el individuo.

Asimismo, con la exposición gráfica del modelo de consumos contingentes, en este capítulo también se analiza cómo cambia la varianza de los consumos cuando la riqueza del individuo se incrementa. En esta discusión es bastante relevante la manera en que la riqueza afecta el grado de aversión al riesgo del individuo, como veremos en la sección 4.3.

4.1. Modelo de manejo de riesgos con consumos contingentes

Aunque en la realidad los agentes económicos manejan el riesgo a través de activos, para presentar los conceptos básicos del manejo de riesgos se introduce un modelo con consumos contingentes (esto es, consumos condicionales a la realización de un determinado estado de la naturaleza). En el marco de este modelo, dada la distribución de probabilidades entre los distintos estados de la naturaleza, los individuos deberán intercambiar consumos contingentes de tal manera que optimicen su bienestar.

Asumamos que para un determinado evento incierto existen solo dos posibles estados de la naturaleza. Sean $\overline{c}_1$ y $\overline{c}_2$ las dotaciones iniciales de un individuo adverso al riesgo en cada uno de los dos posibles estados. En el problema se asume que la varianza asociada a estos pagos es grande y que $\overline{c}_1$ es mucho menor que $\overline{c}_2$, tal como se muestra en la figura 9. Si incorporamos un mecanismo de precios se puede resolver el problema de optimización del individuo de manera análoga a la del problema estándar del consumidor, debido a que la existencia de precios permite tener una valorización de la riqueza del individuo. Sean P_1 y P_2 los precios asociados a los consumos contingentes. Dados estos precios, el individuo tiene que resolver el siguiente problema de optimización restringida:

$$Máx\ U^e = \pi_1.v(c_1) + \pi_2.v(c_2)$$

$$s.a.\ \overline{W} = P_1.\overline{c}_1 + P_2.\overline{c}_2 = P_1.c_1 + P_1.c_1$$

Si planteamos la función lagrangiana asociada al problema del individuo, se tiene que:

$$\mathcal{L} = \pi_1.v(c_1) + \pi_2.v(c_2) + \lambda\left(P_1.\overline{c}_1 + P_2.\overline{c}_2 - P_1.c_1 - P_2.c_2\right)$$

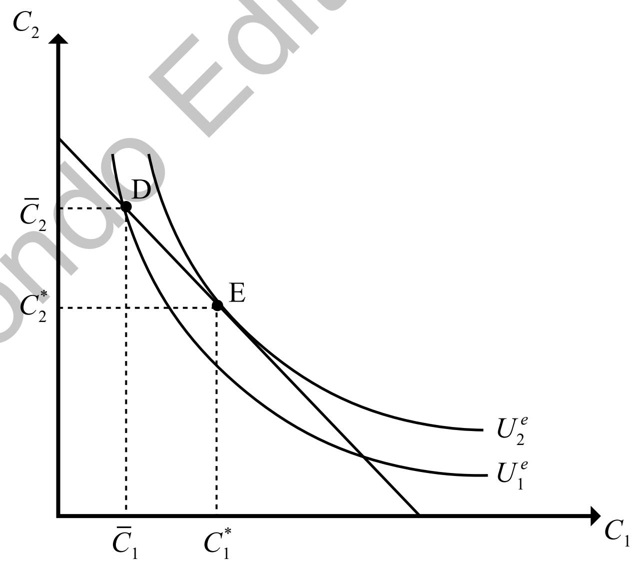
Donde:
λ es el precio sombra de la restricción.

De las condiciones de primer orden para el caso de N estados de la naturaleza se desprende que:

$$\frac{\pi_1 . v'(c_1)}{P_1} = \frac{\pi_2 . v'(c_2)}{P_2} = \ldots = \frac{\pi_N . v'(c_N)}{P_N}$$

Naturalmente en el caso planteado de dos estados de la naturaleza solo es relevante la igualdad de los dos primeros términos. Esta ecuación es conocida como el «Teorema fundamental de manejo de riesgos» y nos dice que, en el óptimo, la utilidad marginal será igual en todos los estados, una vez que se consideren los precios y las probabilidades de ocurrencia de cada uno de ellos.

Figura 9. Óptimo con consumos contingentes



La condición muestra también que si el ratio de precios de los consumos contingentes refleja el ratio de probabilidades, el individuo preferirá tener exactamente la misma cantidad de consumo en todos los estados de la naturaleza. En otras palabras, bajo condiciones estándares, un individuo que maneja riesgos no buscará concentrar riqueza en algunos estados de la naturaleza y de esta manera exponerse a un bajo consumo en otros estados de la naturaleza.

En la figura 9 se observa que si existiera un mercado de consumos contingentes, el individuo podría, bajo los supuestos realizados, pasar del punto D (que corresponde a la combinación de dotaciones iniciales) al punto E (vector de combinación de consumos óptimos) y mejorar su nivel de bienestar. En este punto podemos destacar algunas características que distinguen al problema de consumos contingentes del problema estándar del consumidor:

- En el marco del problema de consumos contingentes no existen bienes inferiores: cuando aumenta la riqueza, también aumenta el nivel de consumo de todos los estados de la naturaleza y todas las utilidades marginales caen (efecto riqueza). No es posible que el consumo en un estado de la naturaleza aumente y en otro disminuya ante un crecimiento de la riqueza.

- Si el precio aumenta para un estado de la naturaleza, entonces el consumo de ese estado tiene que caer por efecto sustitución, pero puede aumentar o disminuir por efecto riqueza según la dotación inicial del individuo. Si el individuo es un vendedor neto de consumos contingentes en el estado de la naturaleza 1, la riqueza aumenta y el efecto total es indeterminado, tal como ocurre en la teoría estándar del consumidor.

- Si para cada par de estados el ratio de precios es igual al ratio de probabilidades, entonces el punto de consumo óptimo E se sitúa sobre la recta de 45°. En este caso el individuo se asegura perfectamente, en el sentido de que escoge los mismos niveles de consumo en todos los escenarios de la naturaleza[1]. Este importante resultado que muestra un rasgo esencial del manejo de riesgos se deriva del teorema fundamental del manejo de riesgos, de acuerdo con el cual, en el óptimo debe cumplirse que:

$$\frac{\pi_i . v'(c_i)}{P_i} = \frac{\pi_j . v'(c_j)}{P_j} \forall i, j$$

Si reacomodamos esta expresión de forma conveniente se obtiene que:

$$\frac{\pi_i . v'(c_i)}{\pi_j . v'(c_j)} = \frac{P_i}{P_j}$$

Pero, si suponemos que $P_i / P_j = \pi_i / \pi_j$, entonces se desprende que:

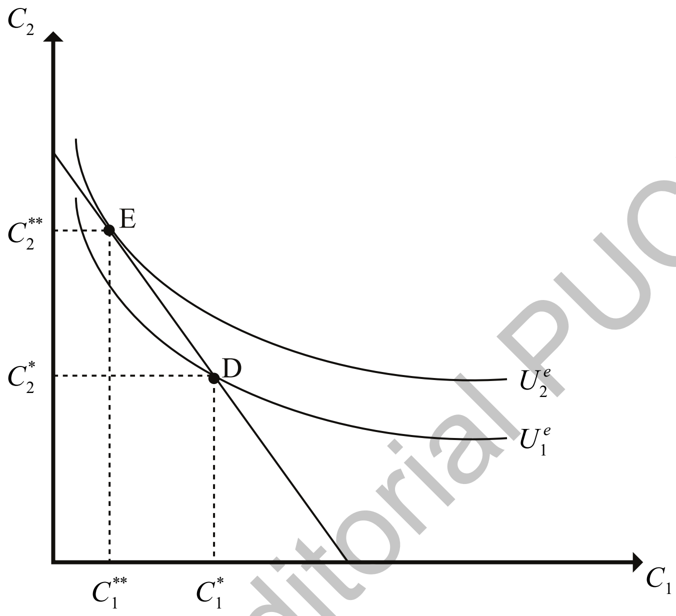
$$v'(c_i) = v'(c_j)$$

$$c_i = c_j$$

- Aun si las probabilidades de ocurrencia no reflejaran los precios de los consumos contingentes, el resultado habitual del proceso de optimización mostraría una tendencia a la suavización del consumo. No obstante, como se ilustra en la figura 10, existe la posibilidad teórica de que la optimización nos lleve de un punto como *D* a un punto como *E*, en el que el consumo en el estado 2 es significativamente mayor al estado 1.

[1] Mas-Colell, Whinston y Green (1995) presentan este resultado para el caso de la adquisición de un seguro.

Figura 10. Caso especial de mayor varianza en el consumo



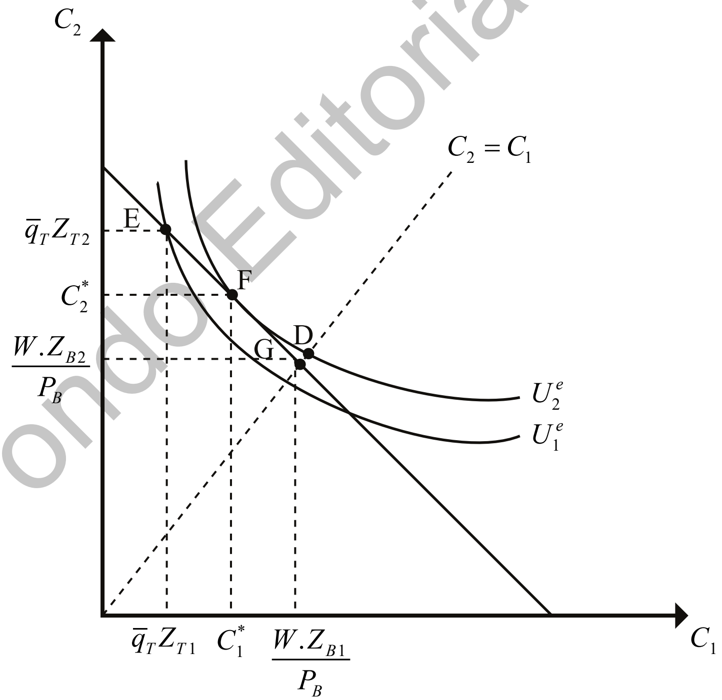
Este resultado podría deberse a que el precio del «bien escaso» para el individuo, en este caso P_1, sea lo suficientemente alto para que prefiera vender el bien a obtener una posición menos riesgosa en términos del consumo. Así, el crecimiento de su bienestar pasa a estar explicado por el notable incremento del consumo en el estado 2.

4.2. Modelo de manejo de riesgos con activos

En el marco del modelo de manejo de riesgos con consumos contingentes, el individuo resolvía su problema de optimización al comprar y vender consumos dependientes del estado, en función de sus preferencias, de su nivel de riqueza y de los precios de mercado. En la realidad, no existen mercados de consumos contingentes, por lo que los individuos manejan el riesgo con activos, comprándolos y vendiéndolos hasta tener el portafolio de activos que les permita manejar los riesgos óptimamente.

Supongamos que un agricultor dispone de un activo $\overline{q}_T$, que en el contexto de este modelo representa las hectáreas de cultivo que dicho agricultor posee. Consideremos, además, que el rendimiento (z_T) de estas áreas de cultivo medido en producción de bienes agrícolas varía según una función exógena (esto es, que no puede ser controlada por el agricultor): la presencia de buen clima. De esta manera, el rendimiento de sus tierras será mayor si el clima le es favorable.

Figura 11. Manejo de riesgos con activos



Lo que el agricultor hará en este contexto es manejar el riesgo con la compra de un segundo activo cuyo rendimiento no esté correlacionado con el ciclo del clima que caracteriza a la región en la que se encuentran ubicadas sus tierras de cultivo. Supongamos que este segundo activo es el de bienes raíces $\overline{q}_B$, el cual existe y está disponible en el mercado[2]. El problema del individuo bajo estas circunstancias es representado por la figura 11.

Del análisis de la figura se desprende que cuando el individuo elige su consumo óptimo, indirectamente elige el portafolio de activos que maximiza su función de utilidad esperada. En la figura 11 es necesario notar que dado que el rendimiento del activo q_B no depende del clima, si el individuo decide emplear toda su riqueza en comprar este activo su consumo será el mismo bajo ambos estados, esto es:

$$\frac{\overline{q}_T \,.\, P_T}{P_B} \,.\, Z_{B2} = \frac{\overline{q}_T \,.\, P_T}{P_B} \,.\, Z_{B1}$$

4.2.1. El problema del consumidor con activos

Ahora presentaremos formalmente el problema del consumidor que maximiza su utilidad esperada en un contexto de manejo de activos. Como ya es habitual, el problema del consumidor consiste en maximizar su utilidad esperada, pero está sujeto a una restricción presupuestal, como en la sección 4.1. De este modo, su utilidad esperada está compuesta por los consumos evaluados en la utilidad elemental del individuo ponderados por la probabilidad de ocurrencia de cada estado.

2 Si estos activos no están disponibles en el mercado o los que existen están correlacionados con el activo tierra, entonces existe un problema de mercados incompletos y el agente no podrá realizar un buen manejo de riesgos.

Sin embargo, en contraste con el modelo de consumos contingentes, la restricción depende de la dotación de activos que el individuo posea y del precio de dichos activos en el mercado.

$$Máx\ U^e = \pi_1 . v(c_1) + \pi_2 . v(c_2)$$

$$s.a.\ P_T . \overline{q}_T + P_B . \overline{q}_B = P_T . q_T + P_B . q_B$$

Así, la función por maximizar está planteada en función de los consumos; sin embargo, en el contexto de este problema, los individuos no eligen cantidades de consumo sino de activos. Dado que la restricción presupuestaria sí está planteada en función de los activos y que el rendimiento de los activos finalmente determina el nivel de consumo en cada estado, podemos expresar los consumos en función del nivel de activos y de sus rendimientos:

$$c_1 = q_T . z_{T1} + q_B . z_{B1}$$

$$c_2 = q_T . z_{T2} + q_B . z_{B2}$$

Estas ecuaciones nos dicen que, si se considera un escenario de optimización estático, el consumo en cada estado es igual a la suma ponderada de la cantidad de activos que posee el individuo, en la cual el factor de ponderación está dado por el rendimiento de cada uno de estos activos en los distintos estados posibles. Así, c_1 es igual a la cantidad de áreas de cultivo multiplicadas por el rendimiento de estas tierras bajo el estado 1 más el nivel del activo bienes raíces multiplicado por su rendimiento bajo el mismo estado de la naturaleza.

Replanteamos el problema de maximización al introducir estas restricciones con igualdad. Las cuatro variables de interés son q_T, q_B, c_1 y c_2:

$$\mathcal{L} = \pi_1 . v\left(q_T . z_{T1} + q_B . z_{B1}\right) + \pi_2 . v\left(q_T . z_{T2} + q_B . z_{B2}\right)$$
$$+ \lambda\left(P_T . \bar{q}_T + P_B . \bar{q}_B - P_T . q_T - P_B . q_B\right)$$

De las condiciones de primer orden obtenemos los siguientes resultados:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_T} = \pi_1 . v'(c_1) . z_{T1} + \pi_2 . v'(c_2) . z_{T2} - \lambda . P_T = 0$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_T} = \pi_1 . v'(c_1) . z_{B1} + \pi_2 . v'(c_2) . z_{B2} - \lambda . P_B = 0$$

Como el rendimiento de los activos considerados es positivo en cualquier estado de la naturaleza, el equilibrio está determinado por la siguiente relación de igualdad:

$$\lambda = \frac{\sum_{i=1}^{N} \pi_i . v'(c_i) . z_{Ti}}{P_T} = \frac{\sum_{i=1}^{N} \pi_i . v'(c_i) . z_{Bi}}{P_B}$$

Esta ecuación es llamada el «teorema fundamental de manejo de riesgos con activos» y lo que nos dice es que el individuo buscará que la contribución marginal en la utilidad esperada de los distintos activos a través de los distintos estados de la naturaleza sea similar. El efecto marginal de un activo en un estado de la naturaleza depende naturalmente del rendimiento mismo del activo en ese estado y de la utilidad elemental marginal asociada al consumo en ese estado, mientras que el impacto global será el impacto en cada estado ponderado por la probabilidad de dicho estado.

- **Ejemplo 1**

En el contexto del problema del agricultor expuesto previamente, se asume que la dotación inicial del agricultor —que está compuesta únicamente por el activo tierras— es q_T = 100. Se sabe, además, que el rendimiento de este activo es z_{T1} = 3, si el clima es favorable, lo que sucede con probabilidad 0.6, y z_{T2} = 1 si el clima es adverso; mientras que el rendimiento del activo bienes raíces, cuya cantidad es q_B, es $z_{B1} = z_{B2} = 2$ (no depende del clima). Si los precios de ambos activos en el mercado son $P_T = P_B = 1$ y las preferencias del agricultor pueden ser resumidas por la función de utilidad $U(c) = ln(c)$, se puede hallar los consumos c_1 y c_2, así como las cantidades de activos q_T y q_B que maximizan la utilidad del agricultor.

Así pues, el problema del agricultor consiste en resolver el siguiente problema de maximización:

$$Máx\ U^e = 0.6.ln(c_1) + 0.4.ln(c_2)$$

$$s.a.\ P_T.q_T + P_B.q_B = 100$$

$$c_1 = 3q_T + 2q_B$$

$$c_2 = q_T + 2q_\mathrm{B}$$

El problema se simplifica si se expresa la restricción presupuestaria en función de c_1 y c_2:

$$c_1 + c_2 = (3q_T + 2q_B) + (q_T + 2q_B)$$

Al despejar, se obtiene:

$$\frac{c_1 + c_2}{4} = q_T + q_B$$

Si se emplea este resultado, nuestro problema de maximización se convierte en un problema con una única restricción:

$$Máx\ U^e = 0.6.ln(c_1) + 0.4.ln(c_2)$$

$$s.a.\ c_1 + c_2 = 400$$

De las condiciones de primer orden se desprenden los siguientes resultados:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial c_1} = \frac{0.6}{c_1} - \lambda = 0$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial c_1} = \frac{0.4}{c_2} - \lambda = 0$$

De ambas ecuaciones se obtiene la siguiente relación entre c_1 y c_2:

$$c_1 = 1.5.c_2$$

Los valores de equilibrio de c_1 y c_2 están dados por las siguientes ecuaciones:

$$c_1 = 240$$

$$c_2 = 160$$

Para obtener los niveles de q_T y q_B que maximizan la utilidad esperada del agricultor solo debemos resolver un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas:

$$3q_T + 2q_B = 240$$

$$q_T + 2q_B = 160$$

Por lo tanto, los niveles de equilibrio de los activos tierra y bienes raíces son, respectivamente, $q_T^* = 40$ y $q_B^* = 60$.

4.3. Manejo de riesgos ante incrementos de la riqueza

Si el individuo tiende a suavizar su consumo entre los distintos estados de la naturaleza para una riqueza dada, una interrogante que surge es qué pasa con el vector de consumos contingentes cuando cambia su riqueza. Intuitivamente se espera que incrementos en la riqueza conduzcan a una menor aversión al riesgo, es decir, que la varianza de los consumos contingentes aumente en la medida que el ingreso aumente.

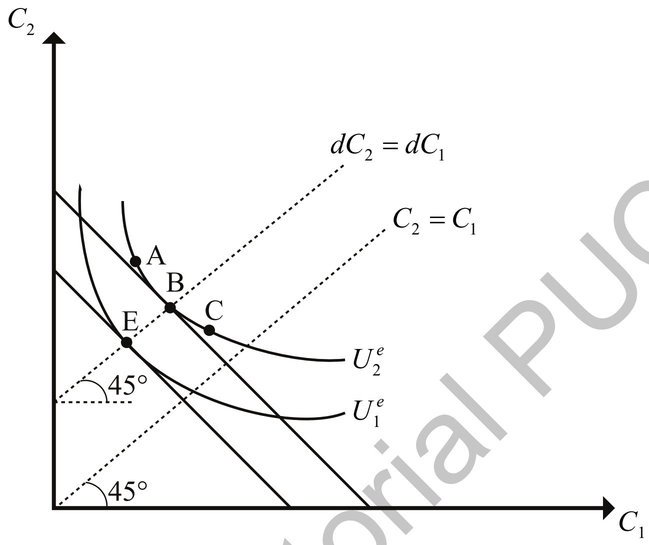
4.3.1. Aversión absoluta al riesgo

En este acápite se evalúa cómo la medida de aversión absoluta al riesgo cambia en función del nivel de riqueza. Con el objetivo de realizar una presentación intuitiva de esta relación, haremos uso de un recurso gráfico propuesto por Hirshleifer y Riley (1992), quienes trazan una línea paralela a la recta de 45° que parte del origen, en el punto de maximización inicial, aprovechando que sobre dicha recta se cumple la siguiente relación:

$$dc_1 = dc_2 = dc$$

En el análisis se asumirá que un mayor nivel de riesgo está asociado a una mayor variabilidad en los consumos de cada estado. Esto es relevante para explorar cómo se altera el grado de aversión al riesgo en respuesta a variaciones en el nivel de riqueza.

Figura 12. Óptimo con aversión absoluta al riesgo



La demostración de este resultado es sencilla. Como se aprecia en la figura 12, la recta discontinua paralela a la recta con ángulo de 45°, que se proyecta desde el origen y que contiene todas aquellas combinaciones en las que c_1 y c_2 son iguales, es tal que satisface la siguiente relación:

$$c_2 = k + c_1$$

Esto se debe a que sobre dicha recta los consumos varían en una misma cantidad absoluta dada por k. Por lo tanto, si diferenciamos esta ecuación obtenemos que:

$$dc_1 = dc_2$$

Consideremos una situación en la que, ante un aumento de su nivel de riqueza, la nueva elección óptima de un individuo está dada por la combinación de consumos representada por el punto *B*. En este caso, diremos que dicho individuo exhibe una aversión al riesgo absoluta constante. Para entender por qué, recordemos que, sobre la recta de 45° que parte del origen, su nivel de consumo será el mismo independientemente de la realización de alguno de los dos estados posibles de la naturaleza, es decir, sobre esta recta el individuo tiene una certeza absoluta sobre su consumo. Por lo tanto, si un aumento en el nivel de riqueza, con todo lo demás constante, hace que ambos consumos aumenten en la misma magnitud, la distancia entre la elección óptima y la línea de certeza seguirá siendo la misma.

En contraste, si se trasladara a un punto como *A*, podemos afirmar que el individuo ha elevado su riesgo absoluto en el consumo (pues $dc_2 > dc_1$), lo cual implica que su tolerancia absoluta por el riesgo ha aumentado. En este caso, decimos que el individuo exhibe aversión absoluta al riesgo decreciente. Por último, si se trasladara a un punto como *C*, si seguimos un razonamiento análogo, podemos afirmar que el individuo exhibe aversión al riesgo absoluta creciente.

Estas respuestas alternativas frente a cambios en el nivel de riqueza imponen algunas restricciones sobre la forma funcional de la función de utilidad elemental $v(c)$. Formalmente, sabemos que la *TMS* es igual a:

$$TMS \equiv \frac{\pi_1.v'(c_1)}{\pi_2.v'(c_2)}$$

Para obtener el cambio en la pendiente absoluta de la curva de indiferencia cuando esta es evaluada en un punto próximo ($c_1 + dc_1$, $c_2 + dc_2$) tomamos el logaritmo natural y luego calculamos su derivada con el fin obtener el cambio en la tasa marginal de sustitución:

$$\partial ln(TMS)/\partial TMS = dTMS/TMS$$

$$ln(TMS) = ln(\pi_1) + ln\left(v'(c_1)\right) - ln(\pi_2) - ln\left(v'(c_2)\right)$$

$$\frac{dTMS}{TMS} = \frac{v''(c_1)}{v'(c_1)} dc_1 - \frac{v''(c_2)}{v'(c_2)} dc_2$$

Hemos visto que, sobre la recta que es paralela a la línea con pendiente de 45° que parte del origen, c_1 y c_2 cambian en la misma magnitud. Por lo tanto, sobre esta recta es posible simplificar la anterior expresión para obtener:

$$\frac{dTMS}{TMS} = \left[\frac{v''(c_1)}{v'(c_1)} - \frac{v''(c_2)}{v'(c_2)}\right] dc$$

Supongamos que, como se aprecia en la figura 11, un aumento de la riqueza conduce a un nuevo punto de consumo óptimo dado por *B*. Dado que la *TMS* es la misma en *E* que en *B* se debe cumplir que:

$$\frac{dTMS}{TMS} = \left[\frac{v''(c_1)}{v'(c_1)} - \frac{v''(c_2)}{v'(c_2)}\right] .dc = 0$$

Dado que sabemos que $dc > 0$, de esta ecuación se obtiene:

$$-\frac{v''(c_1)}{v'(c_1)} = -\frac{v''(c_2)}{v'(c_2)}$$

O equivalentemente:

$$A(c_1) = A(c_2)$$

Dado que, por construcción del ejercicio y como se muestra en la figura, $c_1 < c_2$, este resultado nos dice que un individuo exhibe aversión absoluta al riesgo constante si $A(c)$ permanece inalterado frente a cambios en la riqueza. Si seguimos un análisis gráfico similar para los puntos A y C, se puede arribar a los siguientes resultados:

- El individuo exhibirá una aversión al riesgo absoluta decreciente (DARA, por sus siglas en inglés) y maximizará en A, si y solo si, $A(c)$ es una función decreciente del nivel de riqueza.
- El individuo exhibirá una aversión al riesgo absoluta constante (CARA, por sus siglas en inglés) y maximizará en B, si y solo si, $A(c)$ es independiente del nivel de riqueza.
- El individuo exhibirá una aversión al riesgo absoluta creciente (IARA, por sus siglas en inglés) y maximizará en C, si y solo si, $A(c)$ es una función creciente del nivel de riqueza.

- **Ejemplo 2**

Si las preferencias de un individuo se encuentran resumidas por una función exponencial del tipo $v(c) = -e^{-a.c}$, este tendrá aversión absoluta al riesgo constante y ante un cambio en la riqueza optimizará su utilidad aumentando su consumo de c_1 y c_2 en la misma cantidad, pues:

$$A(c) = -\frac{\left(-a^2.e^{-a.c}\right)}{\left(a.e^{-a.c}\right)} = a$$

Es decir, la aversión al riesgo absoluta de este individuo no depende de c. Un individuo con estas preferencias, ante un incremento de su riqueza, pasará, en la figura 11, de un vector de consumos E a un nuevo vector de consumos B.

4.3.2. Aversión relativa al riesgo

Una medida alternativa del grado de aversión al riesgo es la aversión relativa al riesgo. Para analizar las implicancias gráficas de cambios en la riqueza sobre esta medida, siguiendo a Hirshleifer y Riley (1992), consideraremos cambios proporcionales en lugar de cambios absolutos en los niveles de consumo. Sabemos que en el punto de maximización inicial se cumple que:

$$c_2 = k.c_1$$

Si se diferencia a ambos lados, tenemos que:

$$dc_2 = k.dc_1$$

Al emplear la primera ecuación llegamos a la siguiente igualdad:

$$\frac{dc_2}{c_2} = \frac{dc_1}{c_1}$$

En la sección anterior habíamos obtenido el siguiente resultado:

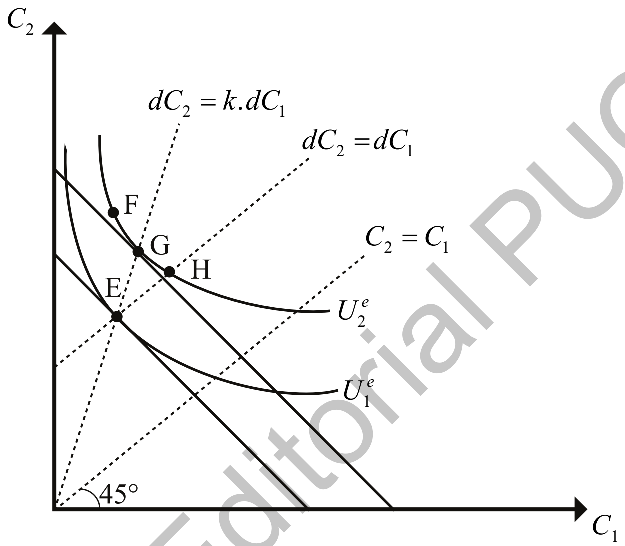
$$\frac{dTMS}{TMS} = \frac{v''(c_1)}{v'(c_1)}.dc_1 - \frac{v''(c_2)}{v'(c_2)}.dc_2$$

Si se reemplaza y factoriza de manera conveniente, llegamos a la siguiente expresión:

$$\frac{dTMS}{TMS} = \left[\frac{v''(c_1)}{v'(c_1)}.c_1 - \frac{v''(c_2)}{v'(c_2)}.c_2\right].\frac{dc_1}{c_1}$$

Con lo cual obtenemos que el cambio en la tasa marginal de sustitución de los consumos es una función de la medida de aversión relativa al riesgo. En la figura 13, si un aumento en el nivel de riqueza conduce a un individuo a optimizar en un punto como *G*, el valor absoluto de la pendiente de la curva de indiferencia en este punto debe ser igual que en *E*, pues los precios se han mantenido inalterados.

Figura 13. Óptimo del individuo con aversión al riesgo relativa



En consecuencia:

$$\frac{dTMS}{TMS} = \left[\frac{v''(c_1)}{v'(c_1)}.c_1 - \frac{v''(c_2)}{v'(c_2)}.c_2\right].\frac{dc_1}{c_1} = 0$$

Este resultado implica que un individuo con una aversión al riesgo relativa constante debe estar caracterizado por una medida de aversión $R(c)$ que también sea una función constante del nivel de riqueza. En la figura 12 podemos observar los distintos puntos de maximización según el tipo de aversión al riesgo relativa que presenta cada individuo:

- Si maximiza en *F*, decimos que el individuo presenta aversión relativa al riesgo decreciente (DRRA, por sus siglas en inglés).

- Si maximiza en G, afirmamos que el individuo presenta aversión relativa al riesgo constante (CRRA, por sus siglas en inglés).
- Si maximiza en H, sostenemos que el individuo presenta aversión relativa al riesgo creciente (IRRA, por sus siglas en inglés).

Debe resaltarse que si un individuo pasa de optimizar en E a optimizar en H ante un aumento en su nivel de riqueza, exhibe aversión absoluta al riesgo constante pero aversión relativa al riesgo creciente, pues aumentaría su consumo de c_1 en una mayor proporción a su consumo de c_2 pero en la misma magnitud.

- **Ejemplo 1**

Si las preferencias de un individuo se encuentran resumidas por una función isoelástica del tipo $v(c)=\frac{c^{1-\theta}}{1-\theta}$, donde $\theta > 0$, entonces dicho individuo presentará CRRA, pues se comprueba que:

$$R(c) = -\frac{\left(-\theta.c^{-1-\theta}\right)}{c^{-\theta}}.c = \theta$$

En otras palabras, la aversión relativa al riesgo de este individuo no depende del nivel de consumo o riqueza. Ante un cambio en la riqueza, un individuo con estas preferencias maximizará su utilidad esperada con el incremento proporcional de su consumo de c_1 y c_2, lo que logra pasando de un punto como E a un punto como G en la figura 12.

- **Ejercicio 1**

¿Qué tipo de patrón tiene un individuo cuyas preferencias son resumidas por una función de utilidad cuadrática?

Capítulo 5
Dominancia estocástica[1]

Una forma alternativa de aproximarnos a la decisión del individuo en contextos de incertidumbre es preguntarnos bajo qué condiciones generales una lotería es preferida a otra. Como veremos en este capítulo, si los individuos tienen preferencias bien comportadas, es posible, bajo ciertas condiciones, estudiar la elección de los individuos al observar únicamente la distribución de probabilidades de los consumos asociados a las diferentes opciones inciertas. En otras palabras, en algunas circunstancias, las características de la distribución de probabilidades serán suficientes para saber si un individuo prefiere una lotería a otra. Cuando es posible elegir entre loterías usando solo las distribuciones de probabilidades, se establece que una distribución domina estocásticamente a la otra.

Específicamente, en el marco de este enfoque, la comparación entre loterías o acciones se realiza sobre la base de dos consideraciones: el nivel de los retornos y su dispersión. Si una distribución de pagos $F(c)$

[1] Esta sección está basada en Mas-Colell, Whinston y Green (1995) y Hirshleifer y Riley (1992), quienes tienen un tratamiento similar del tema. Un tratamiento más técnico puede ser hallado en Rothschild y Stiglitz (1970, 1971), quienes desarrollan varios de los aportes seminales en dominancia estocástica.

proporciona mayores retornos que otra distribución $G(c)$, se afirma que F exhibe dominancia estocástica de primer orden sobre G. En este caso, un individuo preferirá los pagos con la distribución que domina estocásticamente en primer orden porque esta tiene mayores retornos. Por otro lado, si comparamos ambas distribuciones en términos de la dispersión de los pagos y encontramos que $F(c)$ es menos riesgosa que $G(c)$, se afirma que F exhibe dominancia estocástica de segundo orden sobre G. En este caso, un individuo averso al riesgo preferirá claramente los pagos con la distribución que domina estocásticamente en segundo orden porque es menos riesgosa (Mas-Colell, Whinston & Green, 1995).

5.1. Dominancia estocástica de primer orden

Se dice que F domina estocásticamente a G si se cumple que $F(c) \leq G(c), \forall c$ y la desigualdad es estricta sobre algún intervalo, donde $F(c)$ y $G(c)$ son funciones de probabilidad acumuladas. Si F domina estocásticamente en primer orden a G, el individuo va a preferir la distribución de pagos bajo F que la distribución de pagos bajo G. Es decir, la utilidad esperada con la función de densidad asociada a F es mayor que la utilidad esperada con la distribución de densidad asociada a G. De esta forma, podemos evaluar la utilidad esperada para un continuo de pagos de la siguiente manera:

$$\int_{\alpha}^{\beta} v(c).F'(c).dc \geq \int_{\alpha}^{\beta} v(c).G'(c).dc$$

Donde:
$F'(c)$ y $G'(c)$ son funciones de densidad.

Si reemplazamos para aplicar integración por partes, se tiene que:

$$\mu' = F'(c) \rightarrow \mu = F(c)$$

$$v = u(c) \rightarrow v' = u'(c)$$

Luego, al aplicar la integración por partes obtenemos que:

$$v(c).F(c)\Bigg|_{\alpha}^{\beta} - \int_{\alpha}^{\beta} v'^{(c)}.F(c).dc \geq v(c).G(c)\Bigg|_{\alpha}^{\beta} - \int_{\alpha}^{\beta} v'^{(c)}.G(c).dc$$

Dado que la probabilidad acumulada en α es 0, se obtiene que:

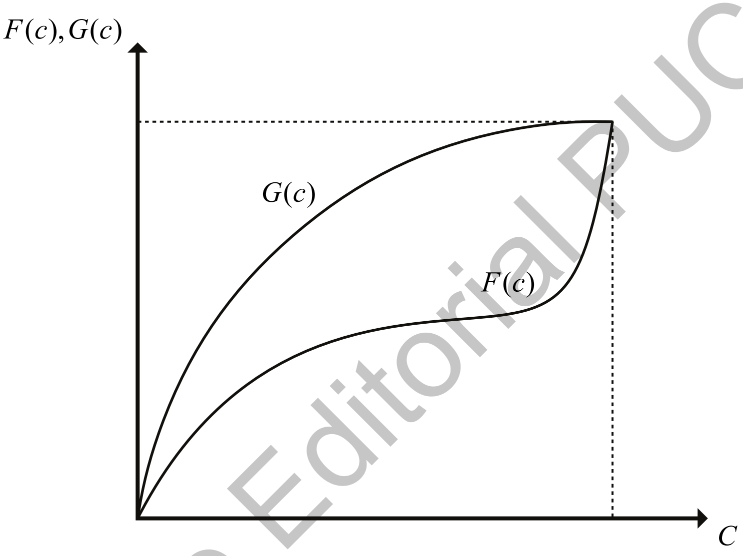
$$v(\beta) - \int_{\alpha}^{\beta} v'^{(c)}.F(c).dc \geq u(\beta) - \int_{\alpha}^{\beta} v'^{(c)}.G(c).dc$$

$$\int_{\alpha}^{\beta} v'^{(c)}.\left[G(c) - F(c)\right].dc \geq 0$$

De esta forma, para que dicha integral sea siempre mayor o igual a 0, se debe cumplir que $G(c)$ sea mayor que $F(c)$ en todo el rango definido. En términos intuitivos, bajo esta condición, lo que ocurriría es que $G(c)$ acumule relativamente mayor probabilidad para pagos bajos mientras que $F(c)$ acumule relativamente mayor probabilidad para pagos altos.

En la figura 14 se representan ambas funciones de distribución acumulada. Es necesario destacar dos características de la figura. En primer lugar, los pagos o consumos posibles son los mismos para ambas distribuciones. En segundo lugar, si una distribución exhibe dominancia estocástica de primer orden sobre otra, ello implica que tiene un retorno esperado mayor. Sin embargo, no se puede determinar si existe dominancia estocástica de primer orden simplemente al comparar los retornos esperados de dos distribuciones. En otras palabras, un mayor retorno esperado no implica dominancia estocástica de primer orden, aunque esta sí implica un mayor retorno esperado (ver Mas-Colell, Whinston & Green, 1995).

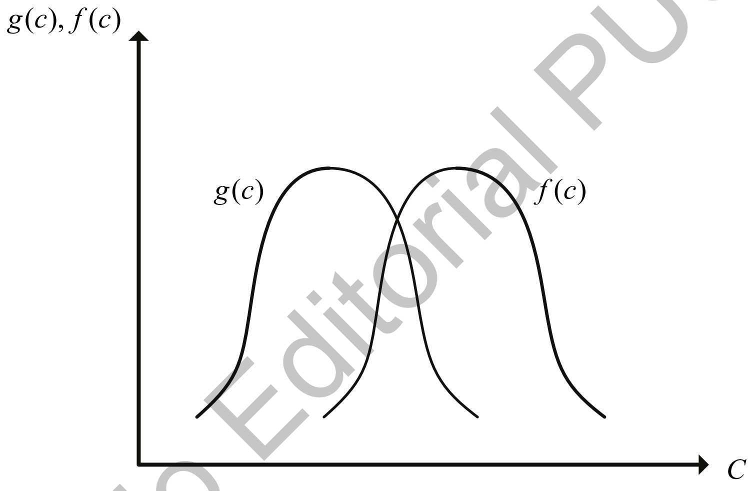
Figura 14. Dominancia estocástica de primer orden



En resumen, en la medida que *F* sea menor que *G* para cualquier posible consumo, se cumple que el individuo prefiere los consumos bajo la distribución *F* que los consumos bajo la distribución *G*. Gráficamente este resultado se puede apreciar claramente, pues si *F* es menor que *G*, los consumos bajos tendrán mayor probabilidad de ocurrencia bajo *G* y los consumos altos mayor probabilidad bajo *F*.

Para lograr una mejor comprensión de este resultado puede ser útil comparar la representación gráfica de las funciones de densidad asociadas a estas funciones de distribución acumuladas. Como se aprecia en la figura 15, la función de densidad $f(c)$ es tal que se asienta a la derecha de $g(c)$, con probabilidades mayores para el rango de pagos relativamente mayor. Claramente, escoger la lotería cuya distribución de pagos está dada por $g(c)$ es una estrategia dominada por la lotería, cuya distribución de pagos está dada por $f(c)$, con menores probabilidades para el rango de pagos bajos.

Figura 15. Dominancia de primer orden en funciones de densidad



La dominancia estocástica de primer orden se produce en situaciones en las que una opción es claramente mejor que la otra y por ello no es tan relevante. Un caso más interesante es la dominancia estocástica de segundo orden. Como se explica en las siguientes líneas, este criterio es útil para situaciones en las que una distribución no es mejor que otra en todas las situaciones. Por ejemplo, el caso en que una función de densidad tiene más probabilidad en los consumos bajos, pero también en los más altos, respecto a una segunda distribución.

5.2. Dominancia estocástica de segundo orden

Se dice que *F* domina estocásticamente en segundo orden a *G* si ocurre que el valor de la función de densidad acumulada para cualquier nivel *c* es menor con *F* que con *G*:

$$\int_{\alpha}^{c} G(x)dx \geq \int_{\alpha}^{c} F(x)dx$$

Aquí la desigualdad se cumple estrictamente para cierto intervalo. Más específicamente, este resultado nos dice que la función *F* exhibe dominancia estocástica de segundo orden sobre la función *G*, si para todo intervalo $[0, c]$ el área bajo $F(c)$ no es nunca mayor que el área correspondiente bajo $G(c)$[2].

Entonces, si *F* domina estocásticamente en primer orden a *G*, el individuo va a preferir la distribución de pagos bajo *F* que la bajo *G* siempre que sea adverso al riesgo (función de utilidad elemental es cóncava y creciente). En este caso:

$$\int_{\alpha}^{c} v(x).dF(x) \geq \int_{\alpha}^{c} v(x).dG(x)$$

En este caso, la dominancia se define para cualquier valor de consumo *c*. Para mostrar este resultado, se puede utilizar el resultado obtenido con la dominancia estocástica de primer grado:

$$\int_{\alpha}^{\beta} v'(c).\left[G(c) - F(c)\right].dc \geq 0$$

[2] Laffont (1989) presenta la definición para dominancia estocástica de orden mayor a 2.

Si remplazamos, de manera que:

$$\mu' = G(c) - F(c) \rightarrow \mu = \int_{\alpha}^{c} \left[G(x) - F(x) \right].dx$$

$$v = u'(c) \rightarrow v' = u''(c)$$

Y simultáneamente aplicamos la regla de Leibniz, de acuerdo con la cual:

$$Si\ I(\theta) = \int_{a(\theta)}^{b(\theta)} f(x,\theta)dx \rightarrow I'^{(\theta)} = \int_{a}^{b} \frac{\partial f(x,\theta)}{\partial \theta} dx$$

$$+ \frac{\partial b}{\partial \theta} f(b,\theta) - \frac{\partial a}{\partial \theta} f(a,\theta)$$

Obtendremos la siguiente expresión:

$$v'(c) \int_{\alpha}^{x} \left[G(\tilde{c}) - F(\tilde{c}) \right].d\tilde{c} \Big|_{\alpha}^{\beta} - \int_{\alpha}^{\beta} v''(c). \int_{\alpha}^{c} \left[G(x) - F(x) \right].dx.dc \geq 0$$

Dados los signos de los diferentes componentes de la expresión, basta con que se cumpla que el individuo sea averso al riesgo (utilidad cóncava) para que esta desigualdad se cumpla. Se puede entender la anterior expresión como una distribución $F(x)$ con un valor esperado, dado que distribuye una parte de su masa de probabilidades hacia las colas y preserva dicho valor esperado, con lo que se obtiene otra distribución $G(x)$; por lo tanto, para todo individuo averso al riesgo, $F(x)$ será una mejor alternativa que $G(x)$. Cuando los valores esperados de las dos distribuciones son iguales, entonces esto sugiere que el individuo prefiere la distribución con menor varianza.

Este resultado es consistente con las preferencias de un individuo averso al riesgo, ya que dicho individuo prefiere una distribución como f —que les asigna menor probabilidad a las pérdidas y las ganancias— a una como g —que les asigna una probabilidad semejante a todos los pagos— pues, como se indicó previamente, un individuo con este tipo de actitud frente al riesgo valora más las pérdidas que las ganancias (ver las figuras 16 y 17).

En el contexto de los resultados de la dominancia estocástica de segundo orden se puede esbozar un tercer resultado. Si dos distribuciones tienen la misma media y una de ellas tiene dominancia estocástica de segundo orden sobre la segunda, entonces un individuo averso al riesgo preferirá los pagos de la distribución que domina estocásticamente en segundo orden debido a que la varianza de los pagos será menor (Laffont, 1989).

Figura 16. Dominancia estocástica de segundo orden

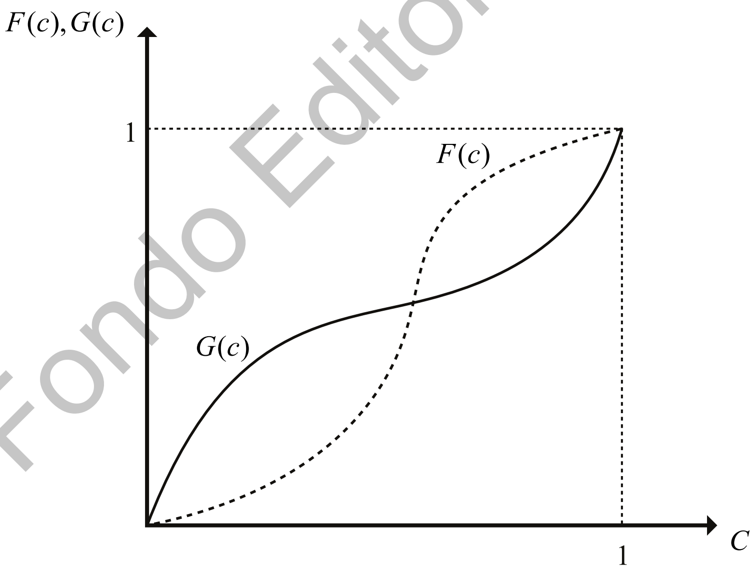
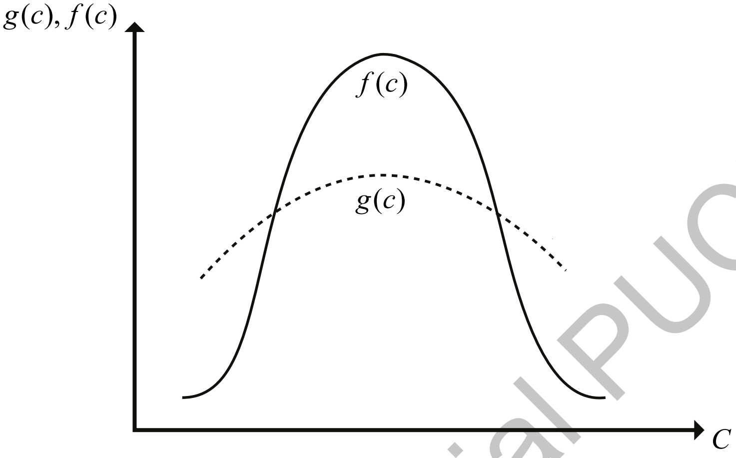


Figura 17. Dominancia de segundo orden y funciones de densidad



- **Ejercicio 1**

Un destacado trabajador en la ciudad de Arequipa es enviado por su empresa a Lima para que trabaje en la sede central. Dicha empresa le ofrece como incentivo un departamento localizado en los distritos de Breña o Pueblo Libre. El departamento será comprado aleatoriamente entre aquellos que tengan entre 120 y 140 m^2 y se sabe que la distribución de valores de estos en cada distrito es dada por la siguiente tabla:

Precio del departamento (en dólares)	Probabilidad de encontrar un departamento en Pueblo Libre	Probabilidad de encontrar un departamento en Breña
50 000	10%	20%
60 000	10%	30%
70 000	20%	10%
80 000	30%	0%
90 000	20%	10%
100 000	10%	30%

Mientras que los precios de los departamentos en Pueblo libre están concentrados alrededor de su media, en Breña la concentración está hacia los extremos de los precios de los departamentos (mayor frecuencia en los departamentos más baratos y más caros) debido a que hay zonas en Breña con mayor y menor seguridad. Si la seguridad en los departamentos de Pueblo Libre es homogénea, ¿qué distribución de departamentos exhibe dominancia estocástica de segundo orden sobre la otra? ¿Qué distrito escogerá el individuo?

Capítulo 6
Enfoque media-varianza

La función de utilidad esperada es una función que depende de las preferencias y la totalidad de la función de distribución de probabilidades. Diversas aplicaciones en economía, como la teoría del portafolio, tienen desarrollos importantes en situaciones en que son relevantes solo los dos primeros momentos de la distribución de probabilidades: la media y la varianza. ¿Es posible que la función de utilidad esperada dependa únicamente de estos estadísticos? La respuesta es sí bajo ciertas condiciones. En este capítulo se ven dos de estas situaciones y, a partir de esta modificación conveniente de la utilidad esperada, se desarrolla su aplicación a la teoría del portafolio.

Entonces, cuando las preferencias y la distribución de probabilidades sobre los posibles eventos estados de la naturaleza satisfacen determinadas condiciones, es posible reescribir la función de utilidad esperada en términos de los dos primeros momentos de la función de distribución (esto es, la media y la varianza). En este contexto, el problema del individuo que elige en condiciones de incertidumbre se centra en la evaluación de dos indicadores: la media y la varianza de los eventos riesgosos o loterías.

$$\left.\begin{array}{l} U^e = \sum_{i=1}^{N} \pi_i . v(c_i) \\ U^e = \int_{\alpha}^{\beta} v(c) . f(c) dc \end{array}\right\} U^e = U^e\left(\mu, \sigma^2\right)$$

Naturalmente, de acuerdo con los desarrollos de los capítulos previos, la función de utilidad es creciente en la media y decreciente en la varianza. El enfoque es muy utilizado en el marco de la teoría financiera, dado que los activos financieros constituyen finalmente opciones riesgosas que pueden ser caracterizadas por su retorno esperado (μ) y su nivel de riesgo (σ), es decir, por su media y su varianza. En este caso, los individuos tienen una mayor utilidad esperada con un mayor retorno y una menor utilidad esperada con el riesgo.

Existen básicamente dos casos en los que la función de utilidad esperada puede ser reescrita en términos de la media y la varianza de la distribución de probabilidad: (a) cuando la función de utilidad elemental es cuadrática y (b) cuando la función de utilidad elemental corresponde a un individuo que exhibe aversión absoluta al riesgo constante y los consumos se distribuyen de acuerdo a una función de densidad normal.

6.1. Preferencias cuadráticas

Considérese el caso de un individuo que debe elegir entre loterías que admiten *N* estados de la naturaleza posibles. En este escenario la función de utilidad esperada será:

$$U^e = \sum_{i=1}^{N} \pi_i . v(c_i)$$

Si el individuo exhibe preferencias cuadráticas, la función de utilidad elemental $v(c_i)$ adopta la siguiente forma:

$$v(c) = k_0 + k_1 c - \frac{k_2}{2} c^2$$

Donde:
k_0, k_1 y k_2 son parámetros positivos.

En las siguientes líneas se muestra que en este caso es posible reescribir la función de utilidad esperada de una lotería, U^e, como una función de la media y la varianza, $U^e = U^e(\mu, \sigma^2)$. En primer lugar, aplicaremos una aproximación de Taylor a la función de utilidad esperada en torno de la media o valor esperado de los pagos μ:

$$U^e = \sum_{i=1}^{N} \pi_i . \left[v(\mu) + v'(\mu).(c_i - \mu) + \frac{v''(\mu)}{2!}.(c_i - \mu)^2 \right.$$
$$\left. + \frac{v'''(\mu)}{3!}.(c_i - \mu)^3 + \ldots \right]$$

La conveniencia práctica de la función cuadrática es que todos los términos más allá de $v''(\mu)$ se hacen 0 por lo que:

$$U^e = \sum_{i=1}^{N} \pi_i . \left[v(\mu) + v'(\mu).(c_i - \mu) + \frac{v''(\mu)}{2!}.(c_i - \mu)^2 \right]$$

Donde:

$$v'(\mu) = k_1 - k_2 \mu$$

$$v''(\mu) = -k_2$$

Si distribuimos, obtenemos que:

$$U^e = \sum_{i=1}^{N} \pi_i . v(\mu) + \sum_{i=1}^{N} \pi_i . v'(\mu).(c_i - \mu) + \sum_{i=1}^{N} \pi_i . \frac{v''(\mu)}{2!}.(c_i - \mu)^2$$

$$U^e = v(\mu). \sum_{i=1}^{N} \pi_i + v'(\mu). \sum_{i=1}^{N} \pi_i .(c_i - \mu) + \frac{v''(\mu)}{2!}. \sum_{i=1}^{N} \pi_i .(c_i - \mu)^2$$

Es necesario notar que en la ecuación anterior por definición de valor esperado tenemos que: $\sum_{i=1}^{N} \pi_i .(c_i - \mu) = 0$. Asimismo, la definición de varianza dice: $\sum_{i=1}^{N} \pi_i .(c_i - \mu)^2 = \sigma^2$. De esta manera, es posible obtener una expresión que dependa únicamente de la media y la varianza:

$$U^e = v(\mu) + \frac{v''(\mu)}{2!} \sigma^2$$

Al reemplazar convenientemente, obtenemos la siguiente expresión para U^e en función de los parámetros k_0, k_1 y k_2:

$$U^e = k_0 + k_1 . \mu - \frac{k_2}{2} . \left(\mu^2 + \sigma^2 \right)$$

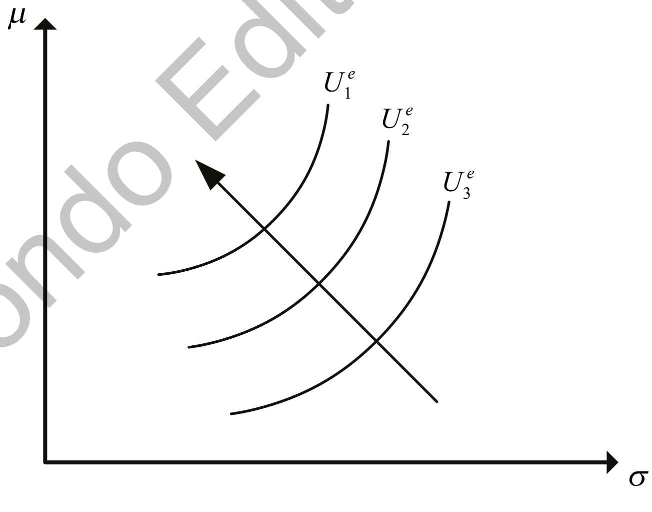
Las mismas condiciones que aseguran que la U^e pueda ser reescrita como función de la media y la varianza aseguran que la media tenga una contribución positiva a la U^e y que la varianza tenga una contribución negativa. En otras palabras, los individuos prefieren menos riesgo y mayor rendimiento. Para obtener una relación entre el rendimiento y el riesgo (es decir, entre la media y la varianza), diferenciamos la ecuación anterior e igualamos el cambio de la utilidad esperada a 0. De esta manera, encontramos que la tasa marginal de sustitución, también conocida como el precio de la reducción del riesgo, en el caso en el que los individuos exhiben preferencias cuadráticas es tal que:

$$dU^e = k_1.d\mu - k_2.\mu.d\mu - k_2.\sigma.d\sigma = 0$$

$$\frac{d\mu}{d\sigma} = \frac{\sigma.k_2}{k_1 - k_2.\mu}$$

Este resultado nos indica que la tasa marginal de sustitución no solo es positiva, sino que además es creciente, es decir, la tasa a la que se intercambia riesgo por retorno crece a medida que aumenta el riesgo. De este modo, en el caso de individuos adversos al riesgo caracterizados por este tipo de preferencias, aumentos de la misma magnitud en el nivel de riesgo deben ser compensados con incrementos marginales cada vez mayores en el nivel de retorno para mantener su nivel de bienestar inalterado. El mapa de curvas de indiferencia de la figura 18 resume estas características.

Figura 18. Curvas de indiferencia en espacio media-varianza



Debe señalarse que esta proyección de la función de utilidad esperada en el espacio media-varianza es el tercer tipo de proyección. En capítulos anteriores se ha mostrado la proyección de la utilidad esperada en el espacio de los consumos y en el espacio de las probabilidades.

6.2. Aversión absoluta al riesgo constante y distribución normal

Podemos obtener también una función de utilidad esperada que dependa de los parámetros de media y varianza cuando la función de utilidad elemental corresponde a un individuo con aversión absoluta al riesgo constante (CARA) y la función de densidad es normal:

$$U^e = \int_\alpha^\beta v(\tilde{c}).f(\tilde{c}).d\tilde{c}$$

Sea $v(c) = -e^{-a.c}$, de modo que el individuo exhiba aversión absoluta al riesgo constante y $f(\tilde{c})$ una normal. Dadas estas dos características la función de utilidad esperada puede ser reexpresada como:

$$U^e = \int_\alpha^\beta -e^{-a.\tilde{c}}.\left(\frac{1}{\sqrt{2.\pi}}.\frac{e^{-\frac{(\tilde{c}-\mu)^2}{2.\sigma^2}}}{\sigma} \right).d\tilde{c}$$

$$U^e = -\int_\alpha^\beta \frac{1}{\sqrt{2.\pi}.\sigma}.e^{-a.\tilde{c}}.e^{-\frac{\left(\tilde{c}^2-2.\tilde{c}.\mu+\mu^2\right)}{2.\sigma^2}}.d\tilde{c}$$

$$U^e = -\int_\alpha^\beta \frac{1}{\sqrt{2.\pi}.\sigma}.e^{-\frac{1}{2.\sigma^2}\left(\tilde{c}^2-2.\tilde{c}.\mu+2.\sigma^2.a.\tilde{c}+\mu^2\right)}d\tilde{c}$$

Al factorizar de forma conveniente el término $(\tilde{c}^2 - 2.\tilde{c}.\mu + 2.\sigma^2.a.\tilde{c} + \mu^2)$ se obtiene que:

$$\tilde{c}^2 - 2.\tilde{c}.\mu + 2.\sigma^2.a.\tilde{c} + \mu^2 = \tilde{c}^2 - 2(\mu - a.\sigma^2).\tilde{c} + \mu^2$$

Luego, si completamos cuadrados, llegamos a la siguiente expresión:

$$\tilde{c}^2 - 2.(\mu - a.\sigma^2).\tilde{c} + \mu^2 - 2.a.\mu.\sigma^2 + a^2.\sigma^4 + 2.a.\mu.\sigma^2 - a^2.\sigma^4$$
$$= \left[\tilde{c} - (\mu - a.\sigma^2)\right]^2 + 2.a.\mu.\sigma^2 - a^2.\sigma^4$$

Al reemplazar esta expresión nuevamente en U^e se obtiene que:

$$U^e = -\int_\alpha^\beta \frac{1}{\sqrt{2.\pi}.\sigma}.e^{-\frac{1}{2.\sigma^2}\left[\tilde{c}-\left(\mu-a.\sigma^2\right)\right]^2}.e^{-\frac{1}{2.\sigma^2}\left(2.a.\mu.\sigma^2-a^2.\sigma^4\right)}d\tilde{c}$$

$$U^e = e^{-\frac{1}{2.\sigma^2}\left(2.a.\mu.\sigma^2-a^2.\sigma^4\right)}.\left[\int_\alpha^\beta \frac{1}{\sqrt{2.\pi}.\sigma}.e^{-\frac{1}{2.\sigma^2}\left[\tilde{c}-\left(\mu-a.\sigma^2\right)\right]^2}.d\tilde{c}\right]$$

Debe notarse que la integral entre paréntesis es la de una función de densidad normal análoga a la inicialmente representada, pero con una media distinta. Esto es, la distribución corresponde a una nueva variable $\tilde{\tilde{c}} = \tilde{c} - a.\sigma^2$, cuya media y varianza son:

$$E\left(\tilde{\tilde{c}}\right) = \mu - a\sigma^2$$

$$V\left(\tilde{\tilde{c}}\right) = E\left[\tilde{\tilde{c}} - E\left(\tilde{\tilde{c}}\right)\right]^2 = E\left[\tilde{c} - \mu\right]^2 = \sigma^2$$

Por lo tanto, lo que hemos hecho es mover la función de densidad hacia la izquierda, pues $E\left(\tilde{\tilde{c}}\right) < E\left(\tilde{c}\right)$. Si regresamos a la función de utilidad esperada, lo que tenemos es finalmente la integral de una función de densidad desde su valor mínimo hasta su valor máximo, por lo que se debe cumplir que:

$$\int_{\alpha}^{\beta} \frac{1}{\sqrt{2.\pi}.\sigma}.e^{-\frac{1}{2.\sigma^2}.\left[\tilde{c}-\left(\mu-a.\sigma^2\right)\right]^2}.d\tilde{c} = 1$$

Al reemplazar obtenemos que:

$$U^e = e^{-\frac{1}{2.\sigma^2}.\left(2.a.\mu.\sigma^2 - a^2.\sigma^4\right)}$$

Si simplificamos esta expresión, tenemos que:

$$U^e = e^{-\frac{1}{2}.\left(2.a.\mu - a^2.\sigma^2\right)}$$

De donde se obtiene que:

$$U^e = \mu - 0.5.a.\sigma^2$$

Nuevamente obtenemos una función de utilidad esperada como función de la media y varianza de la distribución de probabilidades. Debe notarse que, en este caso, la aversión al riesgo expresado por el coeficiente de aversión absoluta está representada por el parámetro a, que también indica qué eventos riesgosos impactan en la utilidad esperada a través de esta sensibilidad del individuo al riesgo.

6.3. Teoría del portafolio[1]

En el contexto del problema de manejo de riesgos a través de un portafolio de activos, en el cual son relevantes el retorno y el riesgo, consideremos el caso de un inversionista típico que dispone de una riqueza $\bar{W}$ con la que puede adquirir N distintos activos. La restricción presupuestal de este individuo está dada por $\bar{W} = \sum_{i=1}^{N} P_i^A . q_i$, donde P_i^A es el precio de mercado del activo i. Se define el retorno $\tilde{Z}_i = \left(1 + \tilde{r}_i\right). P_i^A$, y los valores de retorno esperado asociados al activo i son $E\left(\tilde{Z}_i\right) = \mu_i$ y $V\left(\tilde{Z}_i\right) = \sigma_i^2$, respectivamente.

De esta forma, el individuo construye un portafolio de activos de tal manera que los rendimientos determinan para él un nivel de consumo $\tilde{C} = \sum_{i=1}^{N} \tilde{Z}_i . q_i$, cuyo retorno y riesgo son definidos como: $E\left(\tilde{C}\right) = \mu$ y $V\left(\tilde{C}\right) = \sigma^2$, respectivamente. Su consumo final dependerá de la realización efectiva de estos activos. Si la función de utilidad esperada del individuo depende únicamente de la media y varianza del consumo, ¿cómo construirá el individuo el portafolio de activos? En las siguientes líneas respondemos a esta pregunta al distinguir cuatro casos a partir del número de activos disponibles y de sus características.

6.3.1. Un activo libre de riesgo y un activo riesgoso

Se definen la restricción presupuestaria y el portafolio del inversionista: $\bar{W} = P_1^A.q_1 + P_2^A.q_2$ y $\tilde{C} = Z_1.q_1 + \tilde{Z}_2.q_2$. El rendimiento del activo libre de riesgo (activo 1), que puede ser la tasa de interés

1 Esta sección está basada en Hirshleifer y Riley (1992), que es una exposición es bastante adecuada para un curso de microeconomía. Un tratamiento similar en teoría financiera puede ser hallado en Ingersoll (1987) y una revisión de las fortalezas y debilidades del CAPM en la economía real puede encontrarse en Cochrane (1999).

de una cuenta de ahorros en un banco, es un valor conocido que puede ser definido como:

$$\frac{Z_1}{P_1} = 1 + r_1$$

Donde r_1 es un valor conocido.

El retorno esperado y el riesgo del portafolio de activos son respectivamente:

$$\mu = E(\tilde{C}) = \mu_1.q_1 + \mu_2.q_2,\ \mu_1 = Z_1$$

$$\sigma^2 = V(\tilde{C}) = q_2^2.\sigma_2^2$$

Al despejar q_1 de la restricción presupuestaria se obtiene que:

$$q_1 = \frac{\bar{W} - P_2.q_2}{P_1}$$

Si reemplazamos esta expresión en la ecuación del valor esperado del portafolio, llegamos a la siguiente expresión para μ:

$$\mu = \mu_1.\left[\frac{\bar{W} - P_2.q_2}{P_1}\right] + \mu_2.q_2$$

Sabemos que: $Z_1 / P_1 = \mu_1 / P_1 = 1 + r_1$. Luego, al reemplazar obtenemos que:

$$\mu = (1 + r_1).(\bar{W} - P_2.q_2) + \mu_2.q_2$$

$$\mu = (1 + r_1).\bar{W} - P_2.(1 + r_1).q_2 + \mu_2.q_2$$

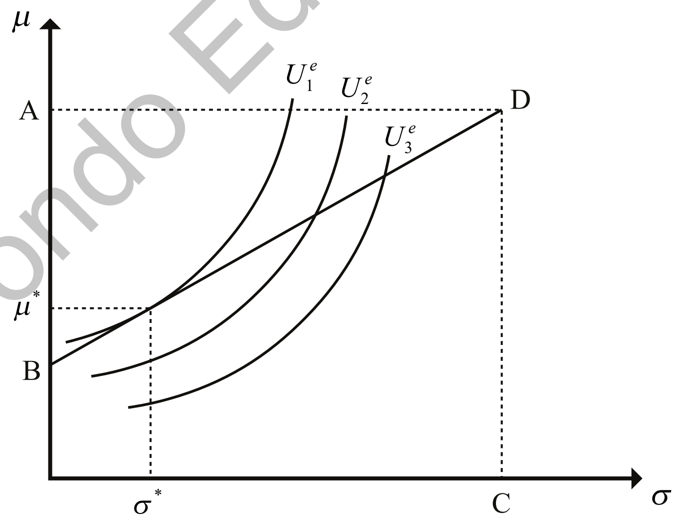
$$\mu = (1 + r_1).\bar{W} + q_2.\left[\mu_2 - P_2.(1 + r_1)\right]$$

De la ecuación que determina el riesgo del portafolio sabemos que $q_2 = \sigma / \sigma_2$. Si reemplazamos este resultado, encontramos una expresión para el retorno esperado del portafolio como una función de la raíz cuadrada del riesgo σ:

$$\mu = (1 + r_1).\bar{W} + \frac{\sigma}{\sigma_2}.\left[\mu_2 - P_2.(1 + r_1) \right]$$

De esta manera, el individuo tiene como restricción una recta con pendiente positiva en el espacio media-varianza (un mayor retorno es conseguido si se asume un mayor riesgo), lo cual le permite escoger entre distintas combinaciones, tal como se muestra en la figura 19. El individuo escoge la participación del activo riesgoso en su portafolio (la participación restante es del activo seguro) y de esta manera obtiene la combinación μ^* y σ^* que optimizan su bienestar en U_1^e.

Figura 19. Portafolio con un activo riesgoso y un activo libre de riesgo



Las principales conclusiones que se desprenden de este caso son:

1. En el lado de las posibilidades de consumo, no es posible tener un mayor retorno sin incurrir en un mayor riesgo.

2. Las preferencias del individuo determinarán la composición final del portafolio: individuos más adversos al riesgo preferirán tener en su portafolio una mayor proporción de activos libres de riesgo.

3. El caso de un activo libre de riesgo y un activo riesgoso es equivalente a una situación en la que hay más de un activo riesgoso, pero donde estos son inferiores al activo 2.

4. Dado que solo se consideran las combinaciones relevantes, la recta que pasa por el punto de optimización es considerada como una «frontera eficiente».

6.3.2. Dos activos riesgosos

Consideremos un escenario en el que existen dos posibilidades de inversión: por un lado, se puede invertir en bonos de gobiernos, por otro lado, se puede invertir en activos de empresas. Los bonos presentan un menor rendimiento que los activos, pero también un menor nivel de riesgo. Sea un individuo que invierte su riqueza en la compra de dos activos riesgosos, q_1 y q_2. La restricción presupuestaria y la ecuación de consumo considerando una determinada composición del portafolio de dicho individuo están dadas por las siguientes ecuaciones:

$$\overline{W} = P_1 . q_1 + P_2 . q_2$$

$$\tilde{C} = q_1 . \tilde{Z}_1 + q_2 . \tilde{Z}_2$$

Es posible modificar la primera ecuación para tener de un lado a la unidad:

$$1 = \frac{P_1.q_1}{\bar{W}} + \frac{P_2.q_2}{\bar{W}}$$

Hirshleifer y Riley (1992) redefinen los valores de los activos como transformaciones lineales de $\tilde{Z}_i$ de modo que:

$$\tilde{C} = \left(\frac{P_1.q_1}{\bar{W}}\right).\underbrace{\frac{\tilde{Z}_1.\bar{W}}{P_1}}_{A} + \left(\frac{P_2.q_2}{\bar{W}}\right).\underbrace{\frac{\tilde{Z}_2.\bar{W}}{P_2}}_{B}$$

El rendimiento esperado y el riesgo asociado a los activos transformados pueden ser expresados mediante las siguientes ecuaciones:

$$\left.\begin{aligned} E\left(\tilde{A}\right) &= \mu_A = \frac{\bar{W}}{P_1}\mu_1 \text{ con } E\left(\tilde{Z}_1\right) = \mu_1 \\ V\left(\tilde{A}\right) &= \sigma_A^2 = \left(\frac{\bar{W}}{P_1}\right)^2 \sigma_1^2 \text{ con } V\left(\tilde{Z}_1\right) = \sigma_1^2 \end{aligned}\right\} \text{Rendimiento esperado y riesgo asociados al } \textit{activo A}$$

$$\left.\begin{aligned} E\left(\tilde{B}\right) &= \mu_B = \frac{\bar{W}}{P_2}\mu_2 \text{ con } E\left(\tilde{Z}_2\right) = \mu_2 \\ V\left(\tilde{B}\right) &= \sigma_B^2 = \left(\frac{\bar{W}}{P_2}\right)^2 \sigma_2^2 \text{ con } V\left(\tilde{Z}_2\right) = \sigma_2^2 \end{aligned}\right\} \text{Rendimiento esperado y riesgo asociados al } \textit{activo B}$$

El cambio de variable es muy conveniente porque permite realizar la siguiente simplificación. Asumamos que:

$$\frac{P_1.q_1}{\bar{W}} = S \rightarrow \frac{P_2.q_2}{\bar{W}} = 1 - S$$

Entonces, es posible reescribir el portafolio de activos, así como el rendimiento esperado y el riesgo asociado a este, en función de A, B y S. Donde S y $1 - S$ son las participaciones de los activos A y B, respectivamente.

$$\tilde{C} = S.\tilde{A} + (1 - S).\tilde{B}$$

$$\mu = E(\tilde{C}) = S.\mu_A + (1 - S).\mu_B$$

$$\sigma^2 = V(\tilde{C}) = S^2.\sigma_A^2 + (1 - S)^2.\sigma_B^2 + 2.S.(1 - S).\sigma_{AB}$$

Donde $\sigma_{AB} = \rho_{AB}.\sigma_A.\sigma_B$.

A partir de aquí se identifican tres casos de acuerdo a los valores extremos de la correlación:

- **Correlación positiva perfecta:** $\rho_{AB} = 1$

En este caso la ecuación de la varianza de los retornos del portafolio puede ser rápidamente simplificada con la ecuación del cuadrado de una suma:

$$\sigma^2 = S^2.\sigma_A^2 + (1 - S)^2.\sigma_B^2 + 2.S.(1 - S).\sigma_A.\sigma_B$$

$$\sigma^2 = (S.\sigma_A + (1 - S).\sigma_B)^2$$

$$\sigma = S.\sigma_A + (1 - S).\sigma_B$$

$$\mu = S.\mu_A + \mu_B - S.\mu_B$$

Con fines expositivos, se puede asumir que $\mu_B > \mu_A$. Naturalmente este supuesto implica que $\sigma_B > \sigma_A$, dado que no es relevante asumir la existencia de un activo que tenga mayor retorno y menos riesgo. De la ecuación de la varianza del portafolio se obtiene que:

$$S.(\sigma_A - \sigma_B) = \sigma - \sigma_B$$

De la ecuación anterior despejamos S y la reemplazamos convenientemente en la ecuación para el rendimiento de portafolio con el fin de hallar una expresión que nos permita escribir el rendimiento como una función del riesgo.

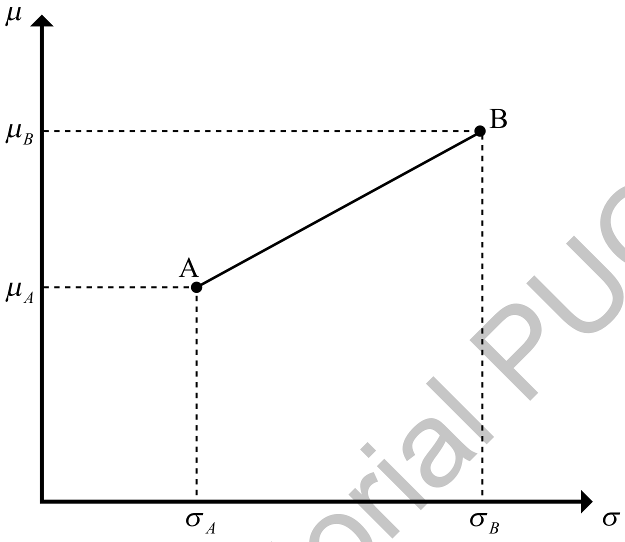
$$S = \frac{\sigma - \sigma_B}{\sigma_A - \sigma_B}$$

$$\mu = \mu_B + S.\left(\mu_A - \mu_B\right)$$

$$\mu = \mu_B + \frac{\sigma - \sigma_B}{\sigma_A - \sigma_B}.\left(\mu_A - \mu_B\right)$$

De esta manera, obtenemos las combinaciones óptimas entre estas variables ofrecidas por los activos, tal como se puede apreciar en la figura 20.

Figura 20. Elección de portafolio entre dos activos riesgosos



- **Correlación negativa perfecta:** $\rho_{AB} = -1$

En este caso la simplificación es similar el desarrollo anterior, lo cual, sin embargo, plantea una solución más compleja porque la diferencia puede tomar valores positivos o negativos. Por ello, la solución es planteada en función al valor absoluto.

$$\sigma^2 = \left(S.\sigma_A - (1-S).\sigma_B\right)^2$$

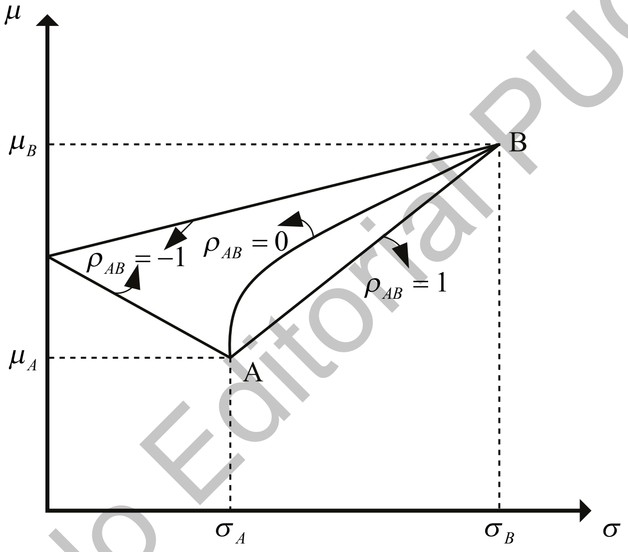
$$\sigma = \left| S.\sigma_A - (1-S).\sigma_B \right|$$

A partir de esta expresión tenemos dos posibles soluciones:

- Si ocurre: $S.\sigma_A - (1-S).\sigma_B > 0$, entonces $\sigma = S.\sigma_A - (1-S).\sigma_B$
- Si ocurre: $S.\sigma_A - (1-S).\sigma_B < 0$, entonces $\sigma = -S.\sigma_A + (1-S).\sigma_B$

Estas dos rectas son parcialmente presentadas en la figura 21 como los segmentos AM y MB. El segmento MB permite entender que la existencia de activos negativamente correlacionados permite al inversionista obtener mejores combinaciones de retorno y riesgo.

Figura 21. Elección de portafolio con distintos grados de correlación



- **Correlación nula:** $\rho_{AB} = 0$

En este caso los activos no están correlacionados y esto motiva una relación cuadrática para *S*:

$$\sigma^2 = S^2.\sigma_A^2 + (1-S)^2.\sigma_B^2$$

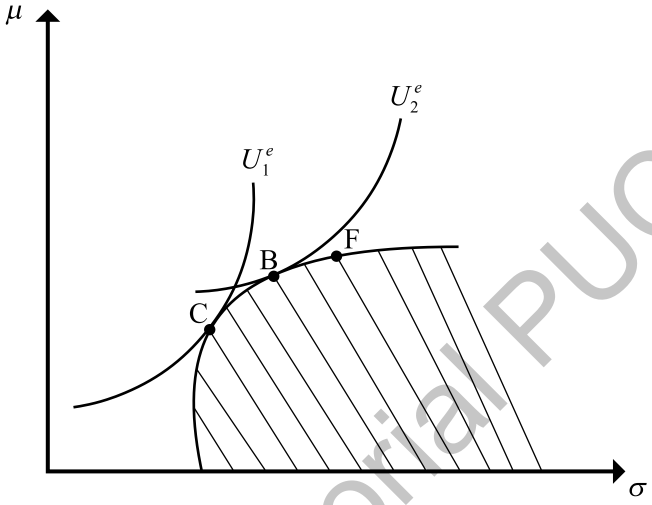
Las combinaciones de riesgo y activo cuando existen dos activos riesgosos no correlacionados son mostradas en la figura 21, en la que también aparecen los otros dos casos estudiados de correlación perfecta. Se aprecia la relación entre rendimiento y riesgo según el tipo de correlación que exhiben. De la figura se puede inferir que, en general, la combinación riesgo —retorno que ofrece cada par de activos riesgosos— es similar gráficamente al caso de la correlación nula. Como se muestra también en la figura, dado un nivel de rendimiento, el nivel de riesgo asociado a un portafolio será menor si los activos que lo conforman se encuentran negativamente correlacionados que si exhiben una correlación nula o positiva.

Asimismo, dado un nivel de riesgo, el nivel de rendimiento asociado a un portafolio será mayor si los activos que lo conforman se encuentran negativamente correlacionados que si exhiben una correlación nula o positiva. Similarmente, los portafolios compuestos por activos que exhiben una correlación nula tendrán menor varianza que los portafolios compuestos por activos que exhiben correlación perfecta, dado un mismo nivel de rendimiento. Si generalizamos, un individuo averso al riesgo preferirá activos negativamente correlacionados, dado que pueden obtener un mismo o un mayor rendimiento con menor riesgo gracias a la posibilidad de diversificar sus riesgos entre estados de la naturaleza.

6.3.3. Muchos activos riesgosos

La generalización del caso anterior para muchos activos lleva a la existencia de un conjunto de posibilidades de inversión convexo. Numerosos activos con diferencias en su riesgo y retorno, así como en su correlación con otros activos generan como posibilidades el área rayada de la figura 22, donde naturalmente el borde superior constituye las combinaciones de activos efectivamente utilizadas por los inversionistas.

Figura 22. Elección de portafolio con numerosos activos riesgosos

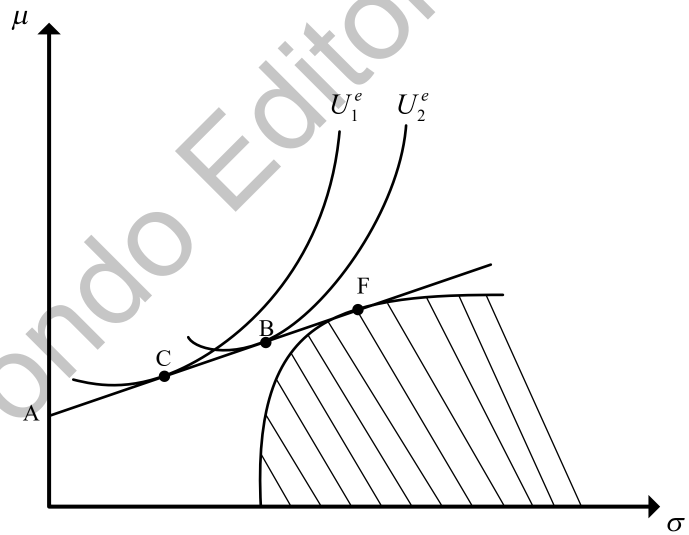


Asumamos que inversionistas muy distintos entre sí destinan su riqueza a la compra de bonos o activos según su grado de aversión al riesgo. En la figura el punto *C* representa las preferencias de un inversionista conservador que ha destinado una mayor proporción de su riqueza a la compra de bonos y ha obtenido un retorno relativamente menor a cambio de una mayor seguridad en su inversión. Por otro lado, el punto *B* representa las preferencias de un inversionista moderado que destina una mayor proporción de su riqueza a la compra de acciones y obtiene un retorno relativamente mayor, pero a costa de un riesgo también mayor. Por último, una combinación de retorno y riesgo dado por el punto *F* sería una alternativa atractiva para un inversionista agresivo pues implicaría un nivel alto de retorno y riesgo.

6.3.4. Muchos activos riesgosos y un activo libre de riesgo

En este caso se señaló su consistencia con la existencia de distintas acciones y bonos. Si se supone que existen tres tipos de activos: ahorro bancario, bonos y acciones, ahora se dispone de un activo libre de riesgo que es el ahorro en una cuenta bancaria, aunque naturalmente con un retorno muy pequeño. La existencia de este tercer activo modifica sustantivamente las condiciones de inversión debido a que se puede optar por combinar lo mejor de los activos riesgosos con el activo libre de riesgos. En la figura 23, la recta *AF* contiene todas las combinaciones eficientes del activo libre de riesgo con la combinación óptima de activos riesgosos con combinación retorno-riesgo en *F* (esta combinación es denominada «fondo mutuo»).

Figura 23. Teorema del fondo mutuo



En el punto *A* toda la riqueza se mantiene en dinero con un retorno bajo pero libre de riesgo. El punto *C* representa las preferencias de un inversionista conservador, pues la mayor parte de su riqueza se encuentra depositada en la cuenta bancaria, aunque existe cierto monto invertido en bonos y activos de mayor retorno y riesgo. El punto *B* representa las preferencias de un inversionista moderado que escoge invertir una buena parte de su riqueza en bonos y activos que invertirla toda en el fondo mutuo. En el punto *F* se invertiría toda la riqueza en el fondo mutuo que contiene la combinación de bonos y activos que proporciona la mejor combinación retorno-riesgo del conjunto factible.

Un resultado del caso de un activo libre de riesgo y numerosos activos riesgosos es que existe un único portafolio de activos riesgosos que es eficiente. Más específicamente, la existencia de un activo libre de riesgo determina un único portafolio eficiente de activos riesgosos y ese es el punto de tangencia *F* en la figura 20. En otras palabras, para cada punto A existe un único punto F tangente a la frontera eficiente. La consecuencia es el denominado «teorema de los fondos mutuos» que nos dice que, independientemente de las preferencias de los individuos, estos utilizarán una única combinación de activos riesgosos (los activos entran en cada portafolio en las mismas proporciones aun cuando los portafolios sean de distintas magnitudes). En lo que difieren estos individuos, dadas sus preferencias, es en la combinación entre activos riesgosos y el activo libre de riesgo.

6.4. El Capital Asset Pricing Model

El modelo de valoración de activos financieros o Capital Asset Pricing Model (CAPM) fue desarrollado por William Sharpe, quien se basó en los trabajos de Harry Markowitz sobre la teoría del portafolio. Este modelo nos permite calcular el precio de los activos, que es usualmente usado en las finanzas como un componente obligatorio para el cálculo del WACC (costo de capital promedio ponderado) de una empresa, el cual incluye todas las fuentes de financiamiento que esta enfrenta para fondear todos sus proyectos de inversión.

En esta sección explicaremos la aplicación del enfoque media-varianza al modelo de valoración de activos financieros. Bajo condiciones de mercados competitivos perfectos y suposiciones que nos permitan considerar solo las esperanzas y varianzas de los retornos, el CAPM proporciona una hipótesis intuitivamente atractiva y empíricamente testeable sobre el retorno de los activos.

Sea un inversionista típico con un nivel de riqueza $\overline{W}$, quien invierte en un portafolio de activos que combina un activo riesgoso F y un activo libre de riesgo 1. Los rendimientos de estos activos y las cantidades de los activos determinan naturalmente el consumo $\tilde{C}$ del individuo. La restricción presupuestal y el consumo serán:

$$\overline{W} = P_1 . q_1 + P_F . q_F$$

$$\tilde{C} = q_1 . Z_1 + q_F . \tilde{Z}_F$$

Puede asumirse que el activo F es la combinación de activos riesgosos eficiente del acápite anterior (es decir, fondo mutuo). Como se indicó antes, el rendimiento esperado y el riesgo asociado al portafolio pueden ser representados por las siguientes ecuaciones:

$$\mu = q_1 . Z_1 + q_F . \mu_F$$

$$\sigma^2 = q_F^2 . \sigma_F^2$$

Ahora bien, si despejamos q_1 de la restricción presupuestaria y reemplazamos en la ecuación, para el rendimiento esperado del portafolio se obtiene:

$$\mu = \left(\frac{\bar{W} - P_F . q_F}{P_1} \right) . Z_1 + q_F . \mu_F \text{, } donde \ \frac{Z_1}{P_1} = 1 + r_1$$

$$\mu = (1 + r_1) . \bar{W} - (1 + r_1) . P_F . q_F + q_F . \mu_F$$

Luego, al factorizar se obtiene:

$$\mu = (1 + r_1) . \bar{W} - q_F . \left(\mu_F - (1 + r_1) . P_F \right) \text{* error signo}$$

$$\mu = (1 + r_1) . \bar{W} - \frac{\sigma}{\sigma_F} . \left(\mu_F - (1 + r_1) . P_F \right)$$

Si diferenciamos esta ecuación, podemos obtener una expresión para el precio del riesgo:

$$\boxed{\frac{d\mu}{d\sigma} = \frac{\mu_F - (1 + r_1) . P_F}{\sigma_F}}$$

Todos los activos riesgosos del portafolio ya están incluidos en q_F. Pero, ¿qué pasa cuando se compra un poco más del activo *a*, un activo riesgoso que está incluido en el fondo mutuo? De este experimento se desprende una relación entre el fondo muto y el activo *a*, hallazgo que constituye la base del CAPM:

$$\bar{W} = P_1 . q_1 + P_F . q_F + P_a . q_a$$

$$\bar{W} = P_a . q_a + P_1 . q_1 + P_F . q_F$$

Vamos a asumir que el inversionista realiza esta compra al reducir la parte de su riqueza que destinaba al activo libre de riesgo (*activo* 1):

$$dW = P_a.dq_a + P_1.dq_1 = 0$$

De esta ecuación se desprenden los siguientes resultados:

$$dq_a = -\frac{P_1}{P_a}.dq_1$$

$$dq_1 = -\frac{P_a}{P_1}.dq_a$$

La nueva restricción presupuestaria será:

$$\bar{W} = P_1.q_1 + P_F.q_F + P_a.q_a$$

La nueva composición del portafolio de activos estará dada por:

$$\tilde{C} = q_1.Z_1 + q_F.\tilde{Z}_F + q_a.\tilde{Z}_a$$

Donde q_1 ya no es el óptimo. Las nuevas ecuaciones para el rendimiento esperado y el riesgo del portafolio son:

$$\mu = q_1.Z_1 + q_F.\mu_F + q_a.\mu_a$$

$$\sigma^2 = q_F^2.\sigma_F^2 + q_a^2.\sigma_a^2 + 2.q_F.q_a.\sigma_{aF}$$

Si diferenciamos totalmente ambas ecuaciones, se obtiene que:

$$d\mu = \mu_1.dq_1 + \mu_a.dq_a$$

$$2.\sigma.d\sigma = 2.q_a.\sigma_a^2.dq_a + 2.q_F.\sigma_{aF}.dq_a$$

Al factorizar de manera conveniente ambas ecuaciones se llega a los siguientes resultados:

$$d\mu = \left(-\frac{P_a}{P_1}.\mu_1 + \mu_a\right).dq_a$$

$$d\sigma = \left(2.q_a.\sigma_a^2 + 2.q_F.\sigma_{aF}\right).\frac{dq_a}{2\sigma}$$

Dado que el análisis se realiza en la proximidad del *activo a*, el valor de q_a tiende a 0. Podemos hallar, entonces, una relación entre el cambio en el retorno y el riesgo del fondo mutuo pero expresado como una función del fondo mutuo y del *activo a*:

$$\frac{d\mu}{d\sigma} = \frac{\mu_a - (P_a / P_1).\mu_1}{\frac{q_F.\sigma_{aF}}{\sigma}}$$

Además se tiene que cuando q_a tiende a 0 $\sigma^2 = q_F^2.\sigma_F^2$, entonces $\sigma_F = \sigma / q_F$. Si se juntan las dos ecuaciones para el precio de la aversión al riesgo (i.e. $d\mu / d\sigma$) llegamos a la siguiente condición de igualdad:

$$\frac{\mu_F - (1+r_1)P_F}{\sigma_F} = \frac{\mu_a - (P_a / P_1)\mu_1}{\sigma_{aF} / \sigma_F}$$

Al desarrollar se llega a:

$$\frac{\sigma_{aF}}{\sigma_F^2}.\left[\frac{\mu_F - (1+r_1).P_F}{P_a}\right] = \frac{\mu_a}{P_a} - (1+r_1)$$

$$\frac{\sigma_{aF}}{\sigma_F^2}.\left[\frac{(1+r_F).P_F-(1+r_1).P_F}{P_a}\right]=(1+r_a)-(1+r_1)$$

$$\frac{\sigma_{aF}}{\sigma_F^2}.\left[(1+r_F)-(1+r_1)\right].\frac{P_F}{P_a}=(1+r_a)-(1+r_1)$$

Si se simplifica a lo esencial, se obtiene la expresión:

$$r_a=r_1+\beta.(r_F-r_1).\frac{P_F}{P_a},\ \beta=\frac{\sigma_{aF}}{\sigma_F^2}$$

Estas dos últimas ecuaciones son las ecuaciones del CAPM. Estas nos dicen que el retorno esperado de un activo r_a en exceso respecto del activo libre de riesgo r_1 es proporcional al premio esperado de mercado $(r_F - r_1)$, donde r_F es el retorno del portafolio. El factor de proporción depende de que tanto riesgo añada el activo en cuestión al portafolio.

El riesgo que se añade es representado por β definido como el ratio covarianza entre el activo a y el portafolio riesgoso F-varianza del portafolio riesgoso F. Econométricamente, β puede entenderse como el coeficiente estimado en la regresión de los retornos de las acciones de la empresa y el premio esperado de mercado.

Una de las ventajas de disponer de una metodología que mida la rentabilidad de una acción es que esta sirva de insumo para calcular el costo promedio ponderado de capital (usualmente denominado WACC), que es la tasa de descuento que se utiliza para descontar los flujos de caja futuros a la hora de valorar un proyecto de inversión. Conceptualmente, el WACC es el costo de oportunidad de una inversión o la tasa de retorno de un proyecto alternativo de similar riesgo.

$$WACC = \frac{D}{D+P}.(1-t).r_d + \frac{P}{D+P}.r_P$$

En la medida en que un proyecto es financiado con fondos propios y deuda, el cálculo del WACC se hace en función del costo de la deuda r_d y el costo de oportunidad del capital propio r_p, las cuales consideran la importancia relativa o participaciones de estas fuentes de financiamiento y el escudo fiscal proporcionado por los intereses de la deuda.

Capítulo 7
Otras aplicaciones

En esta última sección se desarrollan cuatro casos de la literatura económica en los que se aplican los conceptos de incertidumbre tratados en el libro. El primero es la aplicación al caso de la elección de un esquema regulatorio óptimo por parte de la autoridad que sabe de la aversión al riesgo de una empresa concesionaria sujeta a una potencial regulación por incentivos. Este caso es planteado por Armstrong, Cowan y Vickers, en su texto de 1994, sobre la reforma regulatoria en el caso británico. El segundo caso es la aplicación del excesivo diferencial de rendimientos entre bonos y acciones identificados por Mehra y Prescott en su celebrado artículo de 1985. El tercero es una aplicación del modelo básico de utilidad esperada para el caso de la relación entre el salario mínimo y la informalidad. Finalmente, se revisa el modelo de Iossa y Martimort (2009) para la asignación del riesgo de demanda en un contrato de una asociación pública privada.

7.1. Información, aversión al riesgo y regulación

Uno de los aspectos centrales de la regulación de un monopolio natural es la elección del mecanismo de regulación al nivel de precios de la industria. Específicamente un regulador puede optar por diversos mecanismos, como son la regulación por tasa de retorno, la regulación con precios tope, la regulación por comparación o la regulación con ingresos tope[1].

En una industria en la que existe incertidumbre de costos y la empresa concesionaria es adversa al riesgo, ¿qué esquema de regulación es el más adecuado? Armstrong, Cowan y Vickers (1994) desarrollan un modelo que permite entender mejor cómo utilizar los mecanismos regulatorios.

Considérese una empresa i cuya función de costos depende de parámetros exógeno fuera del control de la empresa $\tilde{\theta}_i$ y del esfuerzo e_i que la empresa realiza en reducir dichos costos. La relación entre los costos unitarios y el esfuerzo está dada por la siguiente ecuación:

$$\tilde{c}_i = \tilde{\theta}_i - e_i$$

El esfuerzo le genera costos adicionales a la empresa que toman la forma de una desutilidad. Estos costos son marginalmente crecientes, lo cual es recogido por la forma convexa de la desutilidad del esfuerzo.

$$\psi(e_i) = \frac{e_i^2}{2}$$

Aunque el regulador no conoce la información de costos, conoce en cambio la información estadística del parámetro de costos θ (media, varianza y covarianza con los costos de empresas similares):

$$E\left(\tilde{\theta}_i\right) = \mu$$

1 La regulación por tasa de retorno es un esquema basado en costos y proviene de la casuística norteamericana. La regulación por precios tope atribuida a Stephen Littlechild se aplicó en la reforma estructural británica de la década de 1980. Shleifer (1985) hace una exposición teórica de la regulación por comparación y sus variantes.

$$V\left(\tilde{\theta}_i\right) = \sigma^2$$

$$Cov\left(\tilde{\theta}_i, \tilde{\theta}_j\right) = r.\sigma^2$$

La empresa concesionaria es adversa al riesgo y su función objetivo es resumida por una función de utilidad esperada del enfoque media-varianza en la cual existe una aversión absoluta al riesgo constante:

$$U^e = E(\pi_i) - \frac{\delta}{2}.V(\pi_i)$$

Donde los beneficios de la empresa *i* están representados por:

$$\Pi_i = (p_i - c_i).y_i - \psi(e_i).y_i$$

Además, asumiremos por simplificación que la demanda y_i es fija (esto es, $y_i = \overline{Y} = 1$). La regulación, entonces, consistirá en un juego en el que, en un primer momento, el regulador determina una regla regulatoria y la empresa reacciona con un esfuerzo en reducción de costos determinado. La regla regulatoria es dada por el precio:

$$p_i = \overline{p} + (1-\rho).c_i + \rho.k.c_j$$

La regla regulatoria está caracterizada por tres parámetros: $\overline{p}$, que es un parámetro de nivel; ρ, que es el parámetro que mide el grado de *pass-through* de los costos propios (c_i) al precio; y k, que es el parámetro de relevancia de los costos de otras empresas (c_j). La regla es el caso general de tres tipos de regulación revisados en este capítulo: regulación por costos, regulación por precios tope y regulación por comparación. Cuando la regulación por precios tope es relevante, el parámetro $\overline{p}$ juega un rol central. Cuando la regulación por costos es el caso relevante, el parámetro ρ será pequeño, mientras que la regulación por comparación es relevante cuando este parámetro tiende a la unidad y el parámetro k es máximo.

El regulador tiene como función objetivo el menor precio posible. De otro lado, para completar la función objetivo de la empresa concesionaria es necesario definir π_i como el beneficio por unidad de producto:

$$\frac{\Pi_i}{\overline{y}} = \pi_i = p_i - c_i - \psi(e_i)$$

$$\pi_i = \overline{p} + (1-\rho)c_i + \rho.k.c_j - c_i - \psi(e_i)$$

$$\pi_i = \overline{p} + \rho.k.c_j - \rho.c_i - \psi(e_i)$$

$$\pi_i = \overline{p} + \rho.k.\left(\tilde{\theta}_j - e_j\right) - \rho.\left(\tilde{\theta}_i - e_i\right) - \frac{e_i^2}{2}$$

Nótese que en la última ecuación solo $\tilde{\theta}_j$ y $\tilde{\theta}_i$ son variables aleatorias. El retorno y riesgo esperado asociado al nivel de estos beneficios están dados por las siguientes ecuaciones:

$$E(\pi_i) = \overline{P} + \rho.k.(\mu - e_j) - \rho.(\mu - e_i) - \frac{e_i^2}{2}$$

$$V(\pi_i) = \rho^2.k^2.\sigma^2 + \rho^2.\sigma^2 - 2\rho^2.k.r.\sigma^2$$

Si introducimos estos resultados en la función de utilidad esperada se obtiene que:

$$U^e = \overline{p} + \rho.k.(\mu - e_j) - \rho.(\mu - e_i) - \frac{e_i^2}{2} - \frac{\delta}{2}.\left[\rho^2.\sigma^2.\left(1 + k^2 - 2.k.r\right)\right]$$

En este caso, con la información disponible en un primer momento, el regulador fija los parámetros $\overline{p}$, ρ y k, con lo cual define el esquema regulatorio (escoge un esquema determinado o un híbrido que combina esquemas). En un segundo momento, la empresa concesionaria que observa los valores de los parámetros hace un esfuerzo determinado para reducir costos. Con estas dos etapas concluidas se establecen los pagos del regulador (el menor precio esperado) y de la empresa (la utilidad esperada).

Finalmente, el problema se resuelve por inducción hacia atrás. En otras palabras, el regulador simula la elección del esfuerzo por parte de la empresa en la segunda etapa del juego y luego resuelve su problema de elección de parámetros.

- **Segunda etapa: elección del esfuerzo óptimo**

En la segunda etapa la regla regulatoria es conocida, lo cual especifica los incentivos para la empresa concesionaria. Esta debe escoger su nivel de esfuerzo e a partir de los valores de los parámetros de la regla regulatoria. La empresa optimiza su función objetivo, es decir, la mejor combinación de retorno-riesgo:

$$Máx\ U^e = \overline{p} + \rho.k.(\mu - e_j) - \rho.(\mu - e_i) - \frac{e_i^2}{2} - \frac{\delta}{2}.\left[\rho^2.\sigma^2.\left(1 + k^2 - 2.k.r\right)\right]$$

$$\frac{\partial U^e}{\partial e_i} = \rho - e_i = 0$$

$$e_i^* = \rho$$

De acuerdo con este resultado, el esfuerzo óptimo solo depende de ρ (del grado de *pass-through* de costos a precios). Si ρ es grande, entonces el esfuerzo en reducir costos también será grande. Por el contrario, si en el límite $\rho = 0$ (esto es, el *pass-through* es completo), la empresa no tiene incentivos para esforzarse en disminuir los costos porque estos son cubiertos por el precio. En términos de los riesgos, cuando ρ es grande y los costos suben, el precio no será muy afectado por lo que el riesgo es grande, mientras que cuando ρ es pequeño, un incremento en el costo causará una subida en el precio pagado por el servicio regulado, por lo que el riesgo es menor.

- **Primera etapa: elección del esquema de regulación**

Si se anticipa la reacción de la empresa, el regulador tiene como objetivo minimizar el precio esperado del servicio. Para ello tiene que elegir una combinación de $\overline{p}$, ρ y k que garantice que la empresa participe. Seguidamente, para que la empresa participe, esta combinación debe ser tal que U^e sea al menos igual a 0. Entonces, el problema de optimización del regulador toma la siguiente forma:

$$Mín\ E\{p_i\}$$

$$s.a.\ U^e \geq 0$$

La restricción se cumple con igualdad si ocurre que:

$$U^e = \overline{p} + \rho.k.\left(\mu - e_j\right) - \rho.\left(\mu - e_i\right) - \frac{e_i^2}{2} - \frac{\delta}{2}\left[\rho^2.\sigma^2.\left(1 + k^2 - 2k.r\right)\right] = 0$$

Como este es el caso relevante para el regulador, se puede obtener $\overline{p}$ en función del resto de parámetros e introducir este resultado en la función objetivo. Si despejamos $\overline{p}$ y reemplazamos e_i por el valor óptimo de esfuerzo (es decir, ρ) obtenemos la siguiente expresión:

$$\overline{p} = \rho.(\mu - \rho) - \rho.k.(\mu - \rho) + \frac{\rho^2}{2} + \frac{\rho^2.\sigma^2.\delta}{2}\left(1 + k^2 - 2k.r\right)$$

Dado que $p_i = \overline{p} + \rho.k.(\mu - \rho) - (1-\rho).(\mu - \rho)$, entonces:

$$E\{p_i\} = E\left\{\rho.(\mu-\rho) - \rho.k.(\mu-\rho) + \frac{\rho^2}{2} + \frac{\rho^2.\sigma^2.\delta}{2}\left(1+k^2-2.k.r\right)\right.$$

$$\left. + \rho.k.(\mu-\rho) - (1-\rho).(\mu-\rho)\right\}$$

Si simplificamos, llegaremos a la siguiente expresión:

$$E\{p_i\} = (\mu-\rho) + \frac{\rho^2}{2} + \frac{\rho^2.\sigma^2.\delta}{2}\left(1+k^2-2.k.r\right)$$

Luego, al minimizar esta expresión respecto de los parámetros de interés obtenemos las siguientes condiciones de primer orden:

$$\frac{\partial E(p_i)}{\partial k} = (2k-2r)\frac{\rho^2.\sigma^2.\delta}{2} = 0$$

$$\frac{\partial E(p_i)}{\partial \rho} = -1 + \rho + \rho.\sigma^2.\delta.\left(1+k^2-2.k.r\right)$$

De estas dos ecuaciones se desprenden los siguientes resultados:

$$k^* = r$$

$$\rho^* = \frac{1}{1+\delta.\sigma^2.\left(1-r^2\right)}$$

Lo que dice esta solución es que en la regla regulatoria la relevancia de la regulación por comparación (componente *yardstick*) depende de qué tan correlacionada esté la información de costos de las empresas y, por tanto, de qué tan informativa es la información de la empresa j para la regulación de la empresa i (si r es alto, k es alto).

Así pues, es posible identificar dos casos extremos. Cuando $r = 1$, la correlación entre los costos de las empresas es perfecta, de forma que el regulador puede emplear la información de una empresa para regular a otra. Además, dadas las condiciones de primer orden, se sabe que si $r = 1$, entonces k y ρ son también iguales a la unidad, por lo que el precio queda definido por la siguiente expresión:

$$p_i = \overline{p} + c_j$$

Este es el caso particular en el que el precio es fijado en relación con el de otra empresa, en la cual k es un parámetro dominante. En otras palabras, dicho precio se regula por comparación.

Cuando $r = 0$, k también es 0 y, por lo tanto, se descarta la regulación por comparación. En este caso tenemos, a su vez, dos casos que dependen de c_i y de $\overline{p}$. En este contexto, ¿cómo escoge el regulador entre una regulación por costos y una regulación por precios tope?

La regulación por precios tope es conveniente cuando δ y σ^2 son muy pequeños, esto es, cuando la empresa no es adversa al riesgo y cuando existe poca varianza en la realización de las variables de costos. Esto implica que $\rho \to 1$.

La regulación por costos es conveniente cuando δ y σ^2 son muy grandes pues bajo este esquema ρ y $\overline{p}$ tienden a 0 y el precio es igual a c_i. Pero si $\rho \to 0$, entonces el esfuerzo en la reducción de costos también tiende a 0, por lo que el precio sería más alto. ¿Porque el regulador puede estar interesado en un esquema en el que la reducción de costos es mínima?

La explicación es que cuando la empresa es adversa al riesgo o enfrenta mucho riesgo por la volatilidad del costo, entonces proveer de incentivos bajo precios tope puede ser costoso: de un lado se gana en eficiencia, pero de otro, se pierde en la magnitud de los incentivos. Por lo tanto, el menor precio que desea el regulador puede ser obtenido vía cualquier mecanismo regulatorio o para una combinación determinada de parámetros. Es decir, la idoneidad de un esquema y la fijación de la estructura de incentivos (elección de ρ, $\bar{p}$ y k) depende de los valores de los parámetros (δ, σ^2, μ y r).

7.2. Paradoja Mehra-Prescott

La paradoja de Mehra y Prescott (1985) se refiere a la importante diferencia entre el retorno de un activo riesgoso como las acciones respecto a un activo más seguro como los bonos del tesoro norteamericano a lo largo de gran parte del siglo XX. Los autores, que utilizan data de rendimientos en el periodo 1889-1978, se preguntan por la existencia de un modelo que pueda sustentar dicha diferencia. Más específicamente, se preguntan por el grado de aversión al riesgo que sea consistente con este diferencial. En esta sección se desarrollan los cálculos con un modelo con preferencias caracterizadas por una aversión al riesgo relativa constante (CARA).

Partamos de la ecuación intertemporal de Euler para un individuo representativo que no puede mejorar el óptimo cambiando consumo entre distintos periodos[2]:

$$v'(C_t) = E_t\left\{\beta . v'\left(C_{t+1}\right).\left(1 + r_{t+1}^{i}\right)\right\}$$

[2] A diferencia de la mayor parte de este libro, la ecuación de Euler se deriva de un proceso de optimización dinámico. Más específicamente, de la ecuación recursiva para la función valor contenida en la ecuación de Bellman y la aplicación del concepto de la envolvente.

Con el superíndice i en r_{t+1}^{i} puede referirse a bonos r_{t+1}^{b} o acciones r_{t+1}^{a}. Asumamos que v es una función isoelástica consistente con preferencias con aversión relativa al riesgo constante[3]:

$$v(C_t) = \frac{C_t^{1-\theta}}{(1-\theta)}$$

Seguidamente, si evaluamos la función de utilidad isoelástica en la ecuación de Euler, tenemos:

$$C_t^{-\theta} = E_t\left\{\beta . C_{t+1}^{-\theta} . \left(1+r_{t+1}^{i}\right)\right\}$$

$$\frac{1}{\beta} = E_t\left\{\frac{C_{t+1}^{-\theta}}{C_t^{-\theta}} . \left(1+r_{t+1}^{i}\right)\right\}$$

$$\frac{1}{\beta} = E_t\left\{\left(1+g_{t+1}^{c}\right)^{-\theta} . \left(1+r_{t+1}^{i}\right)\right\}$$

Donde: $g_{t+1}^{c} = \frac{C_{t+1}}{C_t}$ es la tasa de crecimiento del consumo entre el periodo $t+1$ y t. Luego, al aplicar una expansión de Taylor y considerar el estado estacionario, obtenemos:

$$\left(1+g_{t+1}^{c}\right)^{-\theta} . \left(1+r_{t+1}^{i}\right) \equiv (1+r).(1+g)^{-\theta}$$

[3] La función de utilidad tiene aversión al riesgo absoluta decreciente y aversión al riesgo relativa constante:

$$V'(C_t) = C_t^{-\theta}$$

$$V''(C_t) = -\theta . C_t^{-\theta-1}$$

$$r_A(C_t) = \frac{\theta}{C_t} \rightarrow r_r(C_t) = \theta$$

$$\left(1+g_{t+1}^{c}\right)^{-\theta}.\left(1+r_{t+1}^{i}\right)\approx(1+g)^{-\theta}.(1+r)+(1+g)^{-\theta}.\left(r_{t+1}^{i}-r\right)$$

$$-\theta(1+g)^{-\theta-1}.(1+r).\left(g_{t+1}^{c}-g\right)$$

$$+\tfrac{1}{2}.\Big[\theta.(\theta+1).(1+g)^{-\theta-2}.(1+r)\left(g_{t+1}^{c}-g\right)^{2}$$

$$-2.\theta(1+g)^{-\theta-1}\left(r_{t+1}^{i}-r\right).\left(g_{t+1}^{c}-g\right)\Big]$$

Si utilizamos los datos del problema, obtenemos que:

$$\left(1+g_{t+1}^{c}\right)^{-\theta}.\left(1+r_{t+1}^{i}\right)\approx 1+r_{t+1}^{i}-\theta.g_{t+1}^{c}-\theta.g_{t+1}^{c}.r_{t+1}^{i}+\frac{\theta.(\theta+1)}{2}.{g_{t+1}^{c}}^{2}$$

Luego, hallamos el valor esperado a la expresión:

$$E_{t}\left\{\left(1+g_{t+1}^{c}\right)^{-\theta}.\left(1+r_{t+1}^{i}\right)\right\}\approx 1+E_{t}\left\{r_{t+1}^{i}\right\}-\theta.E_{t}\left\{g_{t+1}^{c}\right\}-\theta.E_{t}\left\{g_{t+1}^{c}.r_{t+1}^{i}\right\}$$

$$+E_{t}\left\{\frac{\theta.(\theta+1)}{2}.{g_{t+1}^{c}}^{2}\right\}$$

Y, en la ecuación de Euler, hacemos que:

$$1+\rho=\frac{1}{\beta}=E_{t}\left\{\left(1+g_{t+1}^{c}\right)^{-\theta}.\left(1+r_{t+1}^{i}\right)\right\}$$

$$1+\rho=1+E_{t}\left\{r_{t+1}^{i}\right\}-\theta.E_{t}\left\{g_{t+1}^{c}\right\}-\theta.E_{t}\left\{g_{t+1}^{c}.r_{t+1}^{i}\right\}+\frac{\theta.(\theta+1)}{2}.E_{t}\left\{{g_{t+1}^{c}}^{2}\right\}$$

Si recordamos que $E_t(x, y) - E_t(x).E_t(y) = Cov(x, y)$ y que tanto $E_t\{g^c_{t+1}\}.E_t\{r^i_{t+1}\}$ como $E_t(g^c_{t+1})^2$ son componentes cuyo valor es sustancialmente menor, entonces se obtiene:

$$E_t\left\{r^i_{t+1}\right\} \approx \rho + \theta.E_t\left\{g^c_{t+1}\right\} + \theta.Cov\left(g^c_{t+1}, r^i_{t+1}\right) - \frac{\theta.(\theta+1)}{2}.Var\left(g^c_{t+1}\right)$$

Para los dos activos en la economía, bonos y acciones, podemos obtener una expresión que nos explique el diferencial de los retornos esperados de ambos activos. Para acciones y bonos respectivamente:

$$E_t\left\{r^a_{t+1}\right\} \approx \rho + \theta.E_t\left\{g^c_{t+1}\right\} + \theta.Cov\left(g^c_{t+1}, r^a_{t+1}\right) - \frac{\theta.(\theta+1)}{2}.Var\left(g^c_{t+1}\right)$$

$$E_t\left\{r^b_{t+1}\right\} \approx \rho + \theta.E_t\left\{g^c_{t+1}\right\} + \theta.Cov\left(g^c_{t+1}, r^b_{t+1}\right) - \frac{\theta.(\theta+1)}{2}.Var\left(g^c_{t+1}\right)$$

La diferencia entre ambos retornos esperados será:

$$E_t\left\{r^a_{t+1}\right\} - E_t\left\{r^b_{t+1}\right\} \approx \theta.Cov\left(g^c_{t+1}, r^a_{t+1}\right) - \theta.Cov\left(g^c_{t+1}, r^b_{t+1}\right)$$

O equivalentemente:

$$E_t\left\{r^a_{t+1}\right\} - E_t\left\{r^b_{t+1}\right\} \approx \theta.Cov\left(g^c_{t+1}, \left[r^a_{t+1} - r^b_{t+1}\right]\right)$$

Donde la expresión de covarianza se define como el producto del factor de correlación y las desviaciones estándares. Si se utilizan los datos de bonos y acciones de los Estados Unidos (valores reportados por S&P y los bonos del tesoro), se evidencia la paradoja que identificaron Mehra y Prescott:

$$(0.08) - (0.01) \approx \theta.\left[(0.40).(0.04).(0.167)\right]$$

Con lo cual el coeficiente de aversión relativa al riesgo tendría un valor de:

$$\theta = 26.3$$

En otras palabras, se trata de una aversión al riesgo extremadamente grande. Por ello, Mehra y Prescott (1985) concluyen que el diferencial entre los rendimientos no puede ser explicado por modelos que abstraigan de fricciones, costos de transacción y restricciones de liquidez.

7.3. Salario mínimo e informalidad

La relación entre la informalidad y la fijación de un salario mínimo en el mercado laboral (RMV) ha motivado importantes discusiones en el diseño de la política pública. En esta sección se desarrolla, en analogía al modelo de Allingham y Sandmo (1972) para el caso de la evasión tributaria revisado en secciones previas, un modelo basado en la utilidad esperada para analizar la relación entre la demanda de trabajo informal y la RMV.

En este modelo se asume un emprendedor con contrato para producir la cantidad fija Q, que es producida un único factor de producción; el trabajo. Si consideramos una tecnología lineal con θ, la productividad del trabajo, la demanda derivada de una empresa que minimiza costos está determinada por la cantidad establecida en el contrato. La cantidad de mano de obra total $\overline{L}$ se compone por empleo formal L_1 que recibe la RMV ($\overline{w}$) y de empleo informal L_2, el cual recibe un salario w_2 (con $w_2 < \overline{w}$).

Por otro lado, el emprendedor puede ser detectado por la autoridad laboral con una probabilidad π y multado. Se asume que la multa es t por unidad de empleo informal. Por lo tanto, la utilidad del empleador cuando no es detectado es: $u(\theta.\overline{L} - \overline{w}.L_1 - w_2.L_2)$, pero será menor en caso de ser detectado: $u(\theta.\overline{L} - \overline{w}.L_1 - w_2.L_2 - t.L_2)$.

Se definen Y y Z, el ingreso del emprendedor cuando no es detectado y cuando es detectado, respectivamente, se asume que la suma de los dos empleos es la demanda derivada $\overline{L}$ y se tiene que:

$$Y = (\theta - \overline{w}).\overline{L} + (\overline{w} - w_2).L_2$$

$$Z = (\theta - \overline{w}).\overline{L} + (\overline{w} - w_2 - t).L_2$$

Asimismo, se definen: $m_1 = (\theta - \overline{w})$, $m_2 = (\overline{w} - w_2)$ y $m_3 = (\overline{w} - w_2 - t) < 0$, como los márgenes de la operación, de la informalidad y de la penalidad, respectivamente. La utilidad esperada es:

$$U^e = (1 - \pi).u(Y) + \pi.u(Z)$$

El problema del emprendedor es determinar la composición de la fuerza laboral, el porcentaje de trabajadores informales y el porcentaje de trabajadores formales. Si optimizamos la utilidad esperada con relación al empleo informal L_2 tenemos que:

$$\frac{\partial U^e}{\partial L_2} = (1-\pi).u'(Y).m_2 + \pi.u'(Z).m_3 = 0$$

La condición de primer orden permite obtener la usual relación:

$$\frac{u'(Y)}{u'(Z)} = -\frac{m_3}{m_2}.\frac{\pi}{1-\pi}$$

La condición de segundo orden es:

$$\frac{\partial^2 U^e}{(\partial L_2)^2} = D = (1-\pi).u''(Y).m_2{}^2 + \pi.u''(Z).m_3{}^2 < 0$$

Para obtener el efecto del salario mínimo $\overline{w}$ sobre el empleo informal L_2 diferenciamos la condición de primer orden y obtenemos que:

$$(1-\pi).u''(Y).dY.m_2 + (1-\pi).u'(Y).dm_2 + \pi.u''(Z).dZ.m_3 + \pi.u'(Z).dm_3$$

Donde:

$$dY = -d\overline{w}.\overline{L} + d\overline{w}.L_2 + dL_2.m_2 = -d\overline{w}.\overline{L} + d\overline{w}.L_2 + dL_2.\left(\overline{w} - w_2\right)$$

$$dm_2 = dm_3 = d\overline{w}$$

$$dZ = -d\overline{w}.\overline{L} + d\overline{w}.L_2 + m_3.dL_2 = -d\overline{w}.\overline{L} + d\overline{w}.L_2 + dL_2.\left(\overline{w} - w_2 - t\right)$$

Así:

$$(1-\pi).u''(Y).m_2.\left(m_2.dL_2 - \left(\overline{L} - L_2\right).d\overline{w}\right) + (1-\pi).u'(Y).d\overline{w}$$

$$+\pi.u''(Z).m_3.\left(m_3.dL_2 - \left(\overline{L} - L_2\right).d\overline{w}\right) + \pi.u'(Z).d\overline{w} = 0$$

Al reemplazar $L_1 = \overline{L} - L_2$, agrupar en ambos lados los componentes del empleo informal y RMV, y recordar el componente D de la condición de segundo orden, se obtiene que:

$$D.dL_2 = \left[(1-\pi).u''(Y).m_2.L_1 + \pi.u''(Z).m_3.L_1 - (1-\pi).u'(Y) - \pi.u'(Z)\right].d\overline{w}$$

Ahora bien, queremos encontrar el efecto del cambio de la RMV ($\overline{w}$) sobre el empleo informal (L_2):

$$\frac{dL_2}{d\overline{w}} = \frac{1}{D}.\left[(1-\pi).u''(Y).m_2.L_1 + \pi.u''(Z).m_3.L_1 - (1-\pi).u'(Y) - \pi.u'(Z)\right]$$

$$\frac{dL_2}{d\overline{w}} = \frac{1}{D}.\left[(1-\pi).m_2.L_1.u'(Y).\left(-\frac{u''(Z)}{u'(Z)} - \frac{-u''(Y)}{u'(Y)}\right) - \left(-\frac{m_3}{m_2}+1\right).\pi.u'(Z)\right]$$

Para ello, sabemos que $m_2 - m_3 = t$:

$$\frac{dL_2}{d\overline{w}} = \frac{1}{D}.\left[(1-\pi).m_2.L_1.u'(Y).\left(r_A(Z) - r_A(Y)\right) - \left(\frac{t}{m_2}\right).\pi.u'(Z)\right]$$

El efecto esperado sería que un aumento de la RMV cause mayor empleo informal, ya que la intuición nos dice qué aumentos en el salario mínimo acrecientan las presiones sobre la demanda de trabajo y hacen que a los empleadores no les convenga mantener empleados a muchos trabajadores por un mayor salario, por lo que los desemplean y hacen migrar al sector informal:

$$\frac{dL_2}{d\overline{w}} = \frac{1}{D}.\left[(1-\pi).m_2.L_1.u'(Y).\left(r_A(Z) - r_A(Y)\right) - \left(\frac{t}{m_2}\right).\pi.u'(Z)\right]$$

Pero como $D < 0$, ello ocurrirá si:

$$r_A(Z) < r_A(Y) + \frac{t}{\Delta w.(t-\Delta w).L_1}$$

El efecto del salario mínimo sobre el empleo informal depende del grado de aversión al riesgo del emprendedor. Lo sorprendente del resultado es que la probabilidad de que el empleo informal aumente luego de una elevación del salario mínimo (RMV) se produce cuando la aversión al riesgo es creciente o constante, pero cuando la aversión al riesgo es decreciente, este resultado puede revertirse y el empleo informal puede disminuir cuando se eleva la RMV. La explicación de este resultado puede ser hallada en que un incremento del empleo informal reduce el ingreso del emprendedor en el escenario en que es detectado (Z) y una elevación de la RMV reduce el ingreso del emprendedor en ambos escenarios (Y y Z).

Finalmente, una elevación de la sanción t o de la probabilidad de detección π reducen la reacción del emprendedor a un incremento en la RMV, el cual contrata más empleo informal, mientras que el margen de la informalidad m_2 tiene el efecto contrario. Estos resultados sugieren que zonas o empresas con mayor supervisión y probabilidad de detección tienen menor informalidad.

7.4. Asignación del riesgo de demanda en una asociación público privada

Un aspecto central en el diseño de una asociación público privada tiene que ver con la asignación del riesgo de demanda entre el gobierno y el concesionario. El medio a través del cual el riesgo de demanda es asignado es el mecanismo de pagos, en el cual existen casos extremos en los que un gobierno asume todo el riesgo (por ejemplo, el gobierno paga por la disponibilidad del servicio sin que importe su nivel de uso) o el concesionario asume todo el riesgo (por ejemplo, el usuario paga una determinada suma por el servicio). En esta sección desarrollaremos el análisis de Iossa y Martimort (2008) para el caso de la asignación óptima del riesgo de demanda y la elección del mecanismo de pago.

En este modelo, los consumidores tienen una demanda inelástica del servicio hasta un nivel máximo del precio p_0, dada por:

$$D(p) = \begin{cases} d_0 + e + \eta,\ si: p \leq p_0 \\ 0\ si: p > p_0 \end{cases}$$

Donde $d_0 \geq 0$ denota un nivel base de demanda fija, e es la variable asociada al esfuerzo del agente por aumentar la demanda del consumidor (entendida también como una inversión en la calidad del servicio público), la cual implica costos monetarios para el agente que asumiremos que son dados por una función de desutilidad cuadrática $\varphi(e) = \frac{e^2}{2}$, y η es una variable aleatoria distribuida normalmente con media 0 y varianza σ^2, factor que captura otras variables que pueden afectar la demanda.

En este modelo, los beneficios esperados de la empresa están dados por:

$$E_\eta(B) = p_0.E_\eta\left(máx\{d_o + e + \eta, 0\}\right) \approx p_0.(d_0 + e)$$

La aproximación anterior es claramente válida cuando σ^2 es lo suficientemente pequeño en comparación con el nivel base de la demanda d_0. En el modelo, se asume que no hay problemas de incentivos por el lado del costo y que los costos marginales en la provisión de los servicios son iguales a 0. Con estos supuestos, un mecanismo de pago lineal puede caracterizarse como un esquema de la forma $P(B) = \alpha + \beta.B$. La tarifa α es un pago fijo a la firma (o subsidio), que no depende de los beneficios generados. El coeficiente β es la parte de los ingresos que corresponden a la firma. Por lo tanto, la parte $1 - \beta$ es lo que corresponde al gobierno.

A partir de esta expresión lineal más general se definen los casos posibles. El mecanismo de pago basado solamente en el cargo al usuario corresponde al caso $\alpha = 0$ y $\beta = 1$, de manera que el contratista asume todo el riesgo de la demanda y no recibe un seguro. Por otra parte, un mecanismo de pago del tipo disponibilidad del servicio al margen del uso corresponde con parámetros: $\alpha > 0$ y $\beta = 0$. Aquí, la ganancia del contratista está fija y el gobierno es el que asume todo el riesgo de la demanda.

En el modelo, el gobierno es neutral al riesgo, mientras que el contratista privado es adverso al riesgo con un grado de aversión al riesgo absoluta constante, $\delta > 0$, el cual maximiza su utilidad esperada:

$$U^e = E(\pi) - \frac{\delta}{2} V(\pi)$$

De acuerdo con el enfoque media-varianza, la utilidad esperada crece con el retorno (medido por el valor esperado) y disminuye con el riesgo (medido por la desviación estándar) de los beneficios netos de la desutilidad del esfuerzo: $\pi = \alpha + \beta.\left[p_0.\left(d_o + e + \eta\right)\right] - 0.5.e^2$, entonces:

$$E(\pi) = \alpha + \beta.p_0.\left(d_o + e\right) - \frac{e^2}{2}$$

$$V(\pi) = \beta^2.p_0^2.var(\eta) = \beta^2.p_0^2.\sigma^2$$

Por lo tanto, la utilidad esperada de la empresa se define como:

$$U^e = \alpha + \beta.p_0.(d_o + e) - \frac{e^2}{2} - \frac{\delta}{2}.\beta^2.p_0^2.\sigma^2$$

El contratista desea encontrar el esfuerzo óptimo *e* que maximiza su función de utilidad:

$$\frac{\partial U^e}{\partial e} = \beta . p_0 - e = 0$$

$$e^* = \beta . p_0$$

El mejor nivel de esfuerzo e^* depende directamente de la parte de los ingresos β correspondientes al contratista y del nivel de precios p_0 que se reciben por el servicio. En otras palabras, mientras al privado le corresponda una gran parte de los beneficios generados tendrá más incentivos para aumentar su esfuerzo y así impulsar la demanda, lo cual repercutirá en mayores beneficios esperados. Del mismo modo, si el precio p_0 que recibirá por el servicio es muy grande, el privado realizará un mayor esfuerzo para aumentar su demanda y así capturar mayores beneficios.

El parámetro α tiene el rol de complementar el ingreso de la empresa que debe hacer el esfuerzo para la mejora de la demanda (*e*). Esto significa que mientras mayor sea la tarifa α, la empresa asume una menor parte del riesgo de la demanda, lo cual supone también menores incentivos en el esfuerzo de impulsar la demanda del consumidor *e*.

Por último, resolvemos el problema del gobierno, el cual desea maximizar su recaudación $\{(1 - \beta).B - \alpha\}$, donde $B = p_0.(d_0 + e) = p_0.(d_0 + \beta.p_0)$ y α es el pago fijo que el gobierno le otorga a la firma por sus servicios. Entonces, el gobierno resuelve:

$$Máx(1 - \beta).\left[p_0.(d_0 + \beta . p_0)\right] - \alpha$$

$$s.a\,\bar{U} = \alpha + \beta.p_0\left(d_o + \beta.p_0\right) - \frac{\beta^2.p_0^2}{2} - \frac{\delta}{2}\beta^2.p_0^2.\sigma^2$$

Si utilizamos el método de optimización del multiplicador de Lagrange, tenemos que:

$$L = (1-\beta).\left[p_0.\left(d_0 + \beta.p_0\right)\right] - \alpha$$
$$+\lambda\left(\bar{U} - \alpha - \beta.p_0.\left(d_o + \beta.p_0\right) + \frac{\beta^2.p_0^2}{2} + \frac{\delta}{2}\beta^2.p_0^2.\sigma^2\right)$$

Así, obtenemos las primeras dos condiciones de primer orden:

$$\frac{\partial L}{\partial \alpha} = 1 - \lambda = 0 \Rightarrow \lambda = -1$$

$$\frac{\partial L}{\partial \beta} = p_0^2 - p_0.d_0 - 2.\beta.p_0^2 + \lambda\left(-p_0.d_0 - 2\beta.p_0^2 + \beta.p_0^2 + \delta.\beta.p_0^2.\sigma^2\right) = 0$$

De lo cual se obtiene que:

$$\beta^* = \frac{1}{1 + \delta.\sigma^2}$$

El esquema de pago preferido por el gobierno dependerá de la aversión al riesgo de la empresa y de la varianza de la demanda. Cuando estas variables son importantes, el gobierno preferirá proveer de incentivos menores y asumir el riesgo de demanda, con lo que asegurará los ingresos a la empresa. Por el contrario, cuando la varianza de la demanda no es importante o la empresa no es aversa al riesgo será preferible para el gobierno trasladar el riesgo a la empresa.

Finalmente, teniendo en cuenta la tercera derivada del problema de optimización, se obtiene la misma restricción del problema, que es asegurar un nivel de utilidad a la empresa, de tal manera que participe en la APP. Si reemplazamos β en la restricción para hallar α:

$$\bar{U} = \alpha + \frac{p_0}{1+\delta.\sigma^2}\left(d_o + \frac{p_0}{1+\delta.\sigma^2}\right) - \frac{p_0^2}{2\left(1+\delta.\sigma^2\right)^2} - \frac{\delta.p_0^2.\sigma^2}{2\left(1+\delta.\sigma^2\right)^2}$$

$$\alpha^* = \bar{U} - \frac{p_0}{\left(1+\delta.\sigma^2\right)}\left[d_0 + \frac{p_0.\left(1-\delta.\sigma^2\right)}{2\left(1+\delta.\sigma^2\right)}\right]$$

Si analizamos las implicancias del β^* y α^* óptimos, observamos que si la aversión al riesgo del contratista es mínima, entonces: $\beta = 1\, y\, \alpha = \bar{U} - p_0(d_0 + 0.5.p_0)$. Es decir que se verifica que el contratista, al no ser adverso al riesgo, aceptará arriesgarse y asumir todo el riesgo de demanda con el fin de capturar muchos más beneficios y, por lo tanto, maximizará su esfuerzo $e = p_0$. Transferir riesgo de demanda al contratista le da incentivos para impulsar la demanda (e) y así obtener mayores beneficios (B); sin embargo, ello también le cuesta al gobierno una prima de riesgo más alta. El óptimo mecanismo de pago compensa incentivos con aseguramiento.

Bibliografía

Akerlof, George (1991). Procrastination and Obedience. *The American Economic Review*, *81*(2), 1-19.

Allingham, Michael & Agnar Sandmo (1972). Income Tax Evasion: A Theoretical Analysis. *Journal of Public Economics*, *1*, 323-338.

Armstrong, Mark; Simon Cowan & John Vickers (1994). *Regulatory Reform: Economic Analysis and British Experience.* Londres: MIT Press.

Autor, David (1994). *Lecture Notes on Uncertainty, Expected Utility Theory and the Market of Risk.* Londres: MIT Press.

Bernoulli, Daniel (1954). Exposition of a New Theory on the Measurement of Risk. *Econometrica*, *22*(1), 23-36 [traducción de artículo de 1738].

Caballero, Ricardo (1997). *Aggregate Investment*. NBER documento de trabajo 6264. Cambridge: NBER.

Campbell, John & Tuomo Vuolteenaho (2004). Bad Beta, Good Beta. *The American Economic Review, 94*(5), 1249-1275.

Cochrane, John (1999). *New Facts in Finance*. NBER documento de trabajo 7169. Cambridge: NBER.

Dixit, Avinash & Robert Pindyck (1994). *Investment under Uncertainty*. Princeton: Princeton University Press.

Duflo, Esther; Michael Kremer & Jonathan Robinson (2010). *Nudging Farmers to Use Fertilizer: Theory and Experimental Evidence from Kenya*. NBER documento de trabajo 15131. Cambridge: NBER.

Fama, Eugene & Kenneth French (1992). The Cross-Section of Expected Stock Returns. *Journal of Finance, 47*(2), 427-465.

Figueroa, Adolfo (1981). *La economía campesina de la sierra sur*. Lima: PUCP.

Gallardo, José & Marcia Ruiz (2017). «Nota técnica en incertidumbre e informalidad» [mimeo]. Lima: PUCP, Departamento de Economía.

Hirshleifer, Jack & John Riley (1992). *The Analytics of Uncertainty and Information.* New York: Cambridge University Press.

Ingersoll, Jonathan (1987). *Theory of Financial Decision Making*. Savage: Rowman & Littlefield Publishers, INC.

Iossa, Elisabetta & David Martimort (2008). *The Simple Micro-Economics of Public-Private Partnerships.* Bristol: Universidad de Bristol.

Kahneman, Daniel & Amos Tversky (1979). Prospect Theory: An Analysis of Decision under Risk. *Econometrica, 47*(2), 263-292.

Kreps, David (1990). *A Course in Microeconomic Theory*. Princeton: Princeton University Press.

Laffont, Jean-Jacques (1989). *The Economics of Uncertainty and Information*. Londres: MIT Press.

Laibson, David (1997). Golden Eggs and Hyperbolic Discounting. *The Quarterly Journal of Economics, 112*(2), 443-477.

Machina, Mark (1987). Choice under Uncertainty: Problems Solved and Unsolved. *The Journal of Economic Perspectives, 1*(1), 121-154.

Mas-Colell, Andreu; Michael Whinston & Jerry Green (1995). *Microeconomic Theory.* Nueva York: Oxford University Press.

McFadden, Daniel (1999). Rationality for Economists. *Journal of Risk and Uncertainty*, *19*(1-3), 73-105.

Mehra, Rajnish & Edward Prescott (1985). The Equity Premium: A Puzzle. *Journal of Monetary Economics*, *15*, 145-161.

Nicholson, Walter (1989). *Microeconomic Theory.* Orlando: Dryden Press.

O'Donoghue, Ted & Matthew Rabin (1999). Doing it Now or Later. *The American Economic Review, 89*(1), 103-124.

Pratt, John (1964). Risk Aversion in the Small and the Large. *Econometrica*, *32*, 122-136.

Rabin, Matthew (1998). Psychology and Economics. *Journal of Economic Literature, 36*(1), 11-46.

Rabin, Matthew (2000). Risk Aversion and the Expected-Utility Theory: A Calibration Theorem. *Econometrica*, *68*(5), 1281-1292.

Rabin, Matthew (2002). Inference by Believers in the Law of Small Numbers. *The Quarterly Journal of Economics*, *117*(3), 775-816.

Rothschild, Michael & Joseph Stiglitz (1970). Increasing Risk: I. A Definition. *Journal of Economic Theory*, 2, 225-243.

Rothschild, Michael & Joseph Stiglitz (1971). Increasing Risk: II. It's Economic Consequences. *Journal of Economic Theory*, 3, 66-84.

Schultz, Theodore (1964). *Transforming Traditional Agriculture*. New Haven: Yale University Press.

Shapiro, Karl (1995). *Lecture Notes on Uncertainty.* Berkeley: Universidad de California.

Shleifer, Andrei (1985). A Theory of Yardstick Competition. *The Rand Journal of Economics*, *16(3),* 319-327.

Thaler, Richard & Hersh Shefrin (1981). An Economic Theory of Self-Control. *The Journal of Political Economy*, *89*(2), 392-406.

Varian, Hal (1992). *Microeconomic Analysis.* Nueva York: W.W. Norton & Co.

Las decisiones de los individuos en contextos de incertidumbre son un problema microeconómico habitual. La incertidumbre es un elemento inherente a una parte importante de las opciones de los consumidores, las empresas y los gobiernos en temas como las inversiones, los seguros, las compras de bienes muebles e inmuebles, la evasión tributaria y la regulación de industrias.

En este libro se presentan los aspectos conceptuales y metodológicos para el análisis de la incertidumbre. Se postula que, en todos los casos, los individuos escogen entre las opciones riesgosas disponibles aquella que optimiza su bienestar. Asimismo, se explican las características del enfoque de la «función de utilidad esperada», se señalan los límites del mismo y se discute sobre las contribuciones de la incertidumbre en distintos ámbitos del conocimiento económico.

ET LUX IN TENEBRIS LUCET
MCMXVII
FONDO EDITORIAL
PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DEL PERÚ

ISBN 978-612-317-433-0
9 786123 174330