ME

DECON

MATERIAL DE ENSEÑANZA

DEPARTAMENTO DE ECONOMÍA
Pontificia Universidad Católica del Perú

N° 7

MODELOS DE ECUACIONES SIMULTÁNEAS (MES): APLICACIÓN AL MERCADO MONETARIO

Luis Mancilla, Tania Paredes y Juan León

Departamento Académico de Economía

PUCP

MATERIAL DE ENSEÑANZA N° 7

Modelos de Ecuaciones Simultáneas (MES): Aplicación al mercado monetario

Luis Mancilla, Tania Paredes y Juan León

Agosto, 2022

Departamento Académico de Economía

MATERIAL DE ENSEÑANZA 7
http://files.pucp.edu.pe/departamento/economia/ME007.pdf

Modelos de Ecuaciones Simultáneas (MES): Aplicación al mercado monetario

Editado
© Departamento de Economía – Pontificia Universidad Católica del Perú
Av. Universitaria 1801, Lima 32 – Perú.
Teléfono: (51-1) 626-2000 anexos 4950 - 4951
econo@pucp.edu.pe
https://departamento.pucp.edu.pe/economia/publicaciones/materiales/

Encargada de la Serie: Janina V. León Castillo
Departamento de Economía – Pontificia Universidad Católica del Perú,
jaleon@pucp.edu.pe

Modelos de Ecuaciones Simultáneas (MES): Aplicación al mercado monetario

Luis Mancilla, Tania Paredes y Juan León [1,2]

Junio, 2022

[1]Docentes del Departamento de Economía, PUCP. Correos: luis.mancillam@pucp.edu.pe, tania.paredes@pucp.edu.pe, leon.jjm@pucp.edu.pe

[2]Agradecemos a la Jefa del Departamento de Economía de la Pontificia Universidad Católica del Perú, Janina León, y al profesor Luis García por el apoyo en la revisión final del documento.

Modelos de Ecuaciones Simultáneas (MES): Aplicación al mercado monetario

Luis Mancilla, Tania Paredes y Juan León

RESUMEN

Este documento presenta los fundamentos teóricos y desarrolla los métodos estadísticos relevantes para estimar los parámetros de modelos de ecuaciones simultáneas (MES). Se aborda la definición de modelos en su forma estructural y reducida, el problema de la identificación (condición de orden y rango), y los diferentes métodos de estimación (mínimos cuadrados indirectos, mínimos cuadrados en 2 etapas y mínimos cuadrados en 3 etapas). Asimismo, se presentan aplicaciones empíricas de estas metodologías para que puedan servir de guía para los lectores a través de ejemplos concretos. Finalmente, este documento está orientado a servir de material de enseñanza para los y las estudiantes universitarios, y de guía práctica para el análisis estadístico para los y las investigadores en general que quieran incursionar en el análisis de ecuaciones simultaneas.

Clasificación JEL: C01, C03, C32
Palabras claves: Econometría, Ecuaciones Simultáneas, Métodos de identificación, Métodos de estimación.

ABSTRACT

This document presents the theoretical foundations and develops the relevant statistical methods to estimate the parameters of simultaneous equation models (SEM). It addresses the definition of SEM in its structural and reduced form, the identification problem (order and rank condition), and the different estimation methods (indirect least squares, two-stage least squares and three-stage least squares). In addition, empirical applications of these methodologies are developed that they can serve as a guide for readers through concrete examples. Finally, this document is intended to be a teaching material for university students, and a practical guide for statistical analysis for researchers in general who want to venture into the analysis of SEM.

JEL Classification: C01, C03, C32
Keywords: Econometrics, Simultaneous Equations Models, Identification Methods, Estimation Methods.

Índice

Índice de tablas

Introducción

El presente documento tiene como objetivo brindar un alcance teórico y práctico sobre la estimación de modelos de ecuaciones simultaneas, donde ya no se cuenta con una sola ecuación sino con un sistema de ecuaciones; es decir, las variables dependientes en una ecuación pueden ser explicativas en otra (Gujarati y Porter, 2009; Wooldridge, 2001).

El clásico ejemplo, en microeconomía, es cuando analizamos las condiciones del mercado para un bien determinado. Se cuenta con dos ecuaciones (oferta y demanda del bien) que nos permiten determinar el precio y la cantidad de equilibrio de dicho bien (Gujarati y Porter, 2009; Wooldridge, 2001). Así, este sería un sistema de dos ecuaciones que permite explicar el fenómeno bajo estudio. Sin embargo, dado lo anterior, el supuesto del modelo de regresión lineal de que la variable explicativa no debe estar correlacionada con el termino de error no se cumple, por lo que usar como método de estimación Mínimos Cuadrados Ordinarios (MCO) para cada ecuación resultaría en estimadores inconsistentes, y se necesita usar otros métodos de estimación para obtener estimadores consistentes de las relaciones bajo estudio (Gujarati y Porter, 2009; Wooldridge, 2001). Así, el presente documento revisa la teoría detrás de los modelos de ecuaciones simultaneas, y a través de un ejemplo práctico relacionado al mercado de dinero, se detallan los pasos que se deben seguir para obtener estimadores consistentes para las relaciones bajo estudio.

El documento está dividido en cuatro secciones. La primera da un alcance teórico sobre lo que son los sistemas de ecuaciones simultaneas. La segunda sección brinda detalles sobre lo que significa y las diferencias entre los modelos en la forma reducida y estructural, haciendo hincapié que los modelos en la forma estructural permiten estimar los efectos y las relaciones que se pueden plantear en modelos conceptuales. La tercera sección da un alcance sobre el problema para la identificación de cada una de las ecuaciones del sistema, abordando la aplicación de las condiciones de orden y de rango al momento de identificar un sistema de ecuaciones. La última sección aborda los diferentes métodos de estimación para obtener los parámetros de la forma estructural, describiéndose los métodos de Mínimos Cuadrados

Indirectos (MCI), Mínimos Cuadrados en dos Etapas (MC2E) y Mínimos Cuadrados en tres Etapas (MC3E).

Finalmente, los autores agradecen el apoyo recibido por parte del departamento de economía de la Pontificia Universidad Católica del Perú para la elaboración del presente documento, que esta orientado a servir de material de enseñanza para los y las estudiantes, material de apoyo para los y las docentes y guía práctica para el análisis estadístico para los y las investigadores en general que quieran incursionar en el análisis de ecuaciones simultaneas.

1

Modelos de Ecuaciones Simultáneas (MES)

Los Modelos de Ecuaciones Simultáneas (MES) se caracterizan, a diferencia de otras relaciones que se puedan establecer entre variables Y y X de forma unidireccional, es decir que X cause Y o Y cause X, en que se pueda establecer una doble causalidad entre las variables analizadas. En otras palabras, como lo definen Gujarati y Porter (2009), en los MES hay una relación en dos sentidos, o simultánea, entre Y y (algunas) X, que hace dudar del valor de la distinción entre variables dependientes y explicativas.

Dada esta característica de relación simultánea que puede darse entre dos variables o más, los MES plantean una estrategia que permita, a partir de un conjunto de variables que se determinen simultáneamente, proponer más de una ecuación: una para cada una de las variables mutuamente, o conjuntamente, dependientes o endógenas (Gujarati y Porter, 2009).

Adicionalmente, se deberá tomar en cuenta que a diferencia de la ecuación con una relación unidireccional, en este tipo de modelos no es posible estimar los parámetros de una ecuación aisladamente sin tener en cuenta la información proporcionada por las demás ecuaciones en el sistema.

Cabe mencionar que este tipo de doble relación entre las variables es diversa y se puede encontrar en relaciones tan elementales como lo son la relación precio-cantidad en un modelo de oferta y demanda como se presenta a continuación:

Función de demanda:

$$Q_t^d = \alpha_0 + \alpha_1 P_t + u_{1t}, \alpha_1 > 0 \tag{1.1}$$

Función de oferta:

$$Q_t^s = \beta_0 + \beta_1 P_t + u_{2t}, \beta_1 > 0 \tag{1.2}$$

Dada la relación anterior, se presenta un problema de simultaneidad dado que, finalmente, el equilibrio se establece cuando $Q_t^d = Q_t^s$, surge la necesidad de establecer otros métodos a los usados en los sistemas con relación unidireccional para poder estimar los parámetros que lo conforman.

Por otro lado, también se deberá tomar en cuenta que dentro de los MES, se puede diferenciar entre dos tipos: i) modelos recursivos o en cadenas causales y ii) modelos interdependientes o no recursivos. En el caso de los modelos ecucionales recursivos, todas las ecuaciones están identificadas. Sin embargo, en los sistemas no recursivos, es necesario determinar si esta identificada cada ecuación.

En este sentido, los MES representan una complejidad bastante amplia no solo por definición, sino también el alcance que se pueda dar a estos sobre la estimación. En el caso del desarrollo de este documento, solo nos centratemos en los sistemas que involucran interdependencia, es decir, en aquellos que requieren de una estimación conjunta para conocer los parámetros de interés. Esto se realiza más en detalle en los siguientes capítulos.

2

Modelos estructurales y reducidos

2.1. Definición de un modelo estructural

Un modelo estructural es aquel cuyas ecuaciones explican el comportamiento de algún agente económico en función de otras variables relevantes, entre las cuales pueden incluirse también variables endógenas del modelo. Se distingue del modelo en forma reducida, donde se expresan las variables endógenas del modelo teórico solo en función de determinantes exógenas, pero cuyos parámetros no tienen una explicación teórica.

Por ejemplo, proponemos el siguiente modelo estructural del mercado de dinero, el cual es un híbrido entre un modelo propuesto por Gujarati y Porter (2009) y una ecuación de oferta agregada adaptada del modelo IS-MR dinámico de Mendoza (2018):

$$M_t^d = \beta_0 + \beta_1 Y_t + \beta_2 R_t + \beta_3 P_t + \mu_{1t} \tag{2.1}$$

$$M_t^s = \alpha_0 + \alpha_1 Y_t + \alpha_2 P_{t-1} + \mu_{2t} \tag{2.2}$$

$$P_t = \gamma_0 + \gamma_1 Y_t + \gamma_2 P_{t-1} + \mu_{3t} \tag{2.3}$$

Donde M_t^d corresponde a la demanda de dinero, M_t^s a la oferta de dinero, P_t al precio, R_t a la tasa de interés de los bonos en soles e Y_t al PBI. Además, $\mu_{it} \sim N(0, \sigma_i^2)$ para $i = 1, 2, 3$ y $cov(\mu_{it}, \mu_{jt}) = 0$ para $i \neq j$.

En este modelo podemos argumentar que las ecuaciones nos muestran la estructura de un mercado de la economía, donde cada ecuación tiene una interpretación definida:

(2.1) Es la ecuación de demanda de dinero, la cual depende del ingreso nacional Y_t, la tasa de interés R_t y el nivel de precios P_t.

(2.2) Es la ecuación de oferta de dinero, la cual es determinada por una autoridad de política monetaria que toma en cuenta el ingreso nacional Y_t y el rezago del nivel de precios P_{t-1} para fijar la oferta.

(2.3) Es la ecuación de oferta agregada, la cual fija el nivel de precios P_t en función de la producción Y_t y del rezago de los precios P_{t-1}.

Por tratarse de un modelo estructural podemos argumentar que sus errores μ_{it} tienen interpretaciones económicas. En este caso μ_{1t} es un choque de demanda monetaria, μ_{2t} es un choque de oferta y μ_{3t} es un choque de inflación.

Los errores de los modelos estructurales (μ_{it}) no tienen covarianza entre sí ya que se han conceptualizado como efectos distintos dentro de la economía. La matriz de varianzas y covarianzas de la forma estructural, a la que denotaremos como Ω, tiene la siguiente forma para el modelo del mercado de dinero:

$$\Omega = E[\vec{\mu}_t \vec{\mu}_t'] = \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & & \\ 0 & \sigma_2^2 & \\ 0 & 0 & \sigma_3^2 \end{bmatrix}$$

Donde:

$$\vec{\mu} = \begin{bmatrix} \mu_{1t} \\ \mu_{2t} \\ \mu_{3t} \end{bmatrix}$$

2.2. Definición de un modelo reducido

Todo modelo estructural bien definido, [1] puede ser llevado a una forma reducida. Con bien definido nos referimos a que el número de variables endógenas sea igual al número de ecuaciones. En este caso tenemos 3 ecuaciones para las siguientes variables: Y_t, M_t y P_t, por lo que podemos hallar una forma reducida.

La forma reducida nos da una relación directa entre las variables endógenas y los determinantes exógenos. La forma reducida del modelo planteado en el subcapítulo anterior sería la siguiente:

$$Y_t = \Pi_0 + \Pi_1 R_t + \Pi_2 P_{t-1} + v_{1t} \tag{2.4}$$

[1] Es decir, que el número de endógenas del modelo sea igual al número de ecuaciones.

$$M_t = \Pi_3 + \Pi_4 R_t + \Pi_5 P_{t-1} + v_{2t} \tag{2.5}$$

$$P_t = \Pi_6 + \Pi_7 R_t + \Pi_8 P_{t-1} + v_{3t} \tag{2.6}$$

En esta forma podemos notar las siguientes diferencias fundamentales:

- Se ha perdido la relación entre las variables endógenas.
- Ya no hay distinción entre la demanda (M_t^d) y la oferta de dinero (M_t^s) ya que en el equilibrio ambas son iguales a una misma variable (M_t) que representa la cantidad de dinero de equilibrio del mercado.
- Las ecuaciones ya no tienen una interpretación teórica. No podemos sostener que (2.5) es ni la demanda ni la oferta de dinero, del mismo modo que (2.6) no es una ecuación de oferta agregada.
- Los errores ya no tienen una interpretación teórica. Los errores v_{it} son simples errores estadísticos que muestran desviaciones respecto al valor de equilibrio esperado.
- Podemos interpretar las ecuaciones en forma reducida como hallar el valor de equilibrio de las variables endógenas del modelo.

2.2.1. ¿Cómo hallar una forma reducida a partir de la forma estructural?

En este caso, podemos partir de plantear el equilibrio del mercado de dinero utilizando las ecuaciones (2.1) y (2.2):

$$M_t^d = M_t^s \tag{2.7}$$

$$\beta_0 + \beta_1 Y_t + \beta_2 R_t + \beta_3 P_t + \mu_{1t} = \alpha_0 + \alpha_1 Y_t + \alpha_2 P_{t-1} + \mu_{2t}$$

En la ecuación anterior observamos que tenemos 2 variables endógenas: Y_t y P_t. El siguiente paso es despejar cualquiera de las 2 en función del resto de variables y parámetros. En este caso despejaremos Y_t por simplicidad:

$$(\beta_1 - \alpha_1) Y_t = (\alpha_0 - \beta_0) - \beta_2 R_t - \beta_3 P_t + \alpha_2 P_{t-1} + (\mu_{2t} - \mu_{1t})$$

$$Y_t = \frac{\alpha_0 - \beta_0}{\beta_1 - \alpha_1} - \frac{\beta_2}{\beta_1 - \alpha_1} R_t - \frac{\beta_3}{\beta_1 - \alpha_1} P_t + \frac{\alpha_2}{\beta_1 - \alpha_1} P_{t-1} + \frac{\mu_{2t} - \mu_{1t}}{\beta_1 - \alpha_1} \quad (2.8)$$

Una vez hallada la ecuación (2.8), introducimos la ecuación de oferta agregada (2.3) en P_t:

$$\begin{aligned} Y_t = \frac{\alpha_0 - \beta_0}{\beta_1 - \alpha_1} - \frac{\beta_2}{\beta_1 - \alpha_1} R_t - \frac{\beta_3}{\beta_1 - \alpha_1} (\gamma_0 + \gamma_1 Y_t \\ + \gamma_2 P_{t-1} + \mu_{3t}) + \frac{\alpha_2}{\beta_1 - \alpha_1} P_{t-1} + \frac{\mu_{2t} - \mu_{1t}}{\beta_1 - \alpha_1} \end{aligned}$$

Finalmente, despejo en función de Y_t para hallar nuestra primera ecuación en forma reducida:

$$\begin{aligned} Y_t = \frac{\alpha_0 - \beta_0 - \beta_0 \gamma_3}{\beta_1 - \alpha_1 + \beta_3 \gamma_1} - \frac{\beta_2}{\beta_1 - \alpha_1 + \beta_3 \gamma_1} R_t \\ + \frac{\alpha_2 - \beta_3 \gamma_2}{\beta_1 - \alpha_1 + \beta_3 \gamma_1} P_{t-1} + \frac{\mu_{2t} - \mu_{1t} - \beta_3 \mu_{3t}}{\beta_1 - \alpha_1 + \beta_3 \gamma_1} \end{aligned} \quad (2.9)$$

La ecuación (2.9) es idéntica a la ecuación (2.4), solo que en la primera se muestran los parámetros de forma reducida (Π_i) descompuestos en función de parámetros estructurales ($\alpha_i, \beta_i, \gamma_i$). Si introducimos (2.9) en la demanda de dinero (2.1) obtendremos la ecuación en forma reducida de la masa monetaria:

$$\begin{aligned} M_t = \frac{\alpha_0 \beta_1 - \alpha_1 \beta_0 + \alpha_0 \beta_3 \gamma_1 + \alpha_1 \beta_3 \gamma_1}{\beta_1 - \alpha_1 + \beta_3 \gamma_1} - \frac{\alpha_1 \beta_2}{\beta_1 - \alpha_1 + \beta_3 \gamma_1} R_t \\ + \frac{\alpha_2 \beta_1 + \alpha_2 \beta_3 \gamma_1 - \alpha_1 \beta_3 \gamma_2}{\beta_1 - \alpha_1 + \beta_3 \gamma_1} P_{t-1} + \frac{\alpha_1 (\mu_{1t} - \beta_3 \mu_{3t}) + (-\alpha_1 + \beta_3 \gamma_1) \mu_{2t}}{\beta_1 - \alpha_1 + \beta_3 \gamma_1} \end{aligned} \quad (2.10)$$

Análogamente, si introducimos la ecuación (2.9) en la oferta agregada (2.3), obtendremos la ecuación de la forma reducida del nivel de precios:

$$\begin{aligned} P_t = \frac{\alpha_0 \gamma_1 - \alpha_1 \gamma_0 + \beta_0 \gamma_1 + \beta_1 \gamma_0}{\beta_1 - \alpha_1 + \beta_3 \gamma_1} - \frac{\gamma_1 \beta_2}{\beta_1 - \alpha_1 + \beta_3 \gamma_1} R_t \\ + \frac{\alpha_2 \gamma_1 - \alpha_1 \gamma_2 + \beta_1 \gamma_2}{\beta_1 - \alpha_1 + \beta_3 \gamma_1} P_{t-1} + \frac{\gamma_1 (\mu_{2t} - \mu_{1t}) + (\alpha_1 - \beta_1) \mu_{3t}}{\beta_1 - \alpha_1 + \beta_3 \gamma_1} \end{aligned} \quad (2.11)$$

Para concluir, podemos indicar la relación entre los parámetros en forma reducida y en forma estructural. Vemos que los primeros son una mezcla de los primeros, lo que complica bastante su interpretación:

$$\Pi_0 = \frac{\alpha_0 - \beta_0 - \beta_3\gamma_0}{\beta_1 - \alpha_1 + \beta_3\gamma_1}$$

$$\Pi_1 = -\frac{\beta_2}{\beta_1 - \alpha_1 + \beta_3\gamma_1}$$

$$\Pi_2 = \frac{\alpha_2 - \beta_3\gamma_2}{\beta_1 - \alpha_1 + \beta_3\gamma_1}$$

$$\Pi_3 = \frac{\alpha_0\beta_1 - \alpha_1\beta_0 + \alpha_0\beta_3\gamma_1 - \alpha_1\beta_3\gamma_0}{\beta_1 - \alpha_1 + \beta_3\gamma_1}$$

$$\Pi_4 = -\frac{\alpha_1\beta_2}{\beta_1 - \alpha_1 + \beta_3\gamma_1}$$

$$\Pi_5 = \frac{\alpha_2\beta_1 + \alpha_2\beta_3\gamma_1 - \alpha_1\beta_3\gamma_2}{\beta_1 - \alpha_1 + \beta_3\gamma_1}$$

$$\Pi_6 = \frac{\alpha_0\gamma_1 - \alpha_1\gamma_0 + \beta_0\gamma_1 + \beta_1\gamma_0}{\beta_1 - \alpha_1 + \beta_3\gamma_1}$$

$$\Pi_7 = \frac{\gamma_1\beta_2}{\beta_1 - \alpha_1 + \beta_3\gamma_1}$$

$$\Pi_8 = \frac{\alpha_2\gamma_1 - \alpha_1\gamma_2 + \beta_1\gamma_2}{\beta_1 - \alpha_1 + \beta_3\gamma_1}$$

2.2.2. Los errores de la forma reducida

De la misma forma que hallamos los parámetros de la forma reducida en función de los parámetros de la forma estructural, podemos hallar los errores en forma reducida en función de los errores de la forma estructural:

$$v_{1t} = \frac{\mu_{2t} - \mu_{1t} - \beta_3\mu_{3t}}{\beta_1 - \alpha_1 + \beta_3\gamma_1}$$

$$v_{2t} = \frac{\alpha_1(\mu_{1t} - \beta_3\mu_{3t}) + (-\alpha_1 + \beta_3\gamma_1)\mu_{2t}}{\beta_1 - \alpha_1 + \beta_3\gamma_1}$$

$$v_{3t} = \frac{\gamma_1(\mu_{2t} - \mu_{1t}) + (\alpha_1 - \beta_1)\mu_{3t}}{\beta_1 - \alpha_1 + \beta_3\gamma_1}$$

Podemos observar que cada error v_{it} es una mezcla de los errores estructurales de oferta, de demanda y de inflación, por lo que tampoco podemos interpretar directamente estos errores.

Además, estos errores sí tienen covarianza entre sí. La matriz de varianzas y covarianzas de los errores de la forma reducida del modelo del mercado de dinero tiene la siguiente forma:

$$\Sigma = \begin{bmatrix} \frac{\sigma_1^2+\sigma_2^2+\beta_3^2\sigma_3^2}{(\beta_1-\alpha_1+\beta_3\gamma_1)^2} & & \\ \frac{-\alpha_1\sigma_1^2+(-\alpha_1+\beta_3\gamma_1)\sigma_2^2+\alpha_1\beta_3^2\sigma_3^2}{(\beta_1-\alpha_1+\beta_3\gamma_1)^2} & \frac{\alpha_1^2\sigma_1^2+(-\alpha_1+\beta_3\gamma_1)^2\sigma_2^2+(\alpha_1\beta_3)^2\sigma_3^2}{(\beta_1-\alpha_1+\beta_3\gamma_1)^2} & \\ \frac{\gamma_1\sigma_1^2+\gamma_2\sigma_2^2-\beta_3(\alpha_1-\beta_1)\sigma_3^2}{(\beta_1-\alpha_1+\beta_3\gamma_1)^2} & \frac{-\alpha_1\gamma_1\sigma_1^2+\gamma_2(-\alpha_1+\beta_3)\sigma_2^2-\alpha_1\beta_3(\alpha_1-\beta_1)\sigma_3^2}{(\beta_1-\alpha_1+\beta_3\gamma_1)^2} & \frac{\gamma_1^2\sigma_1^2+\gamma_2^2\sigma_2^2+(\alpha_1-\beta_1)^2\sigma_3^2}{(\beta_1-\alpha_1+\beta_3\gamma_1)^2} \end{bmatrix}$$

3

El problema de la identificación

3.1. El concepto de identificación: ¿Cuándo está identificado un modelo estructural?

El concepto de identificación refiere a la posibilidad de estimar el valor de los parámetros de la forma estructural en función de los parámetros de la forma reducida. En el caso del modelo del mercado de dinero (Ecuaciones (2.1), (2.2) y (2.3)) teníamos los siguientes parámetros de la forma reducida:

$$\Pi_0 = \frac{\alpha_0 - \beta_0 - \beta_3\gamma_0}{\beta_1 - \alpha_1 + \beta_3\gamma_1}$$

$$\Pi_1 = -\frac{\beta_2}{\beta_1 - \alpha_1 + \beta_3\gamma_1}$$

$$\Pi_2 = \frac{\alpha_2 - \beta_3\gamma_2}{\beta_1 - \alpha_1 + \beta_3\gamma_1}$$

$$\Pi_3 = \frac{\alpha_0\beta_1 - \alpha_1\beta_0 + \alpha_0\beta_3\gamma_1 - \alpha_1\beta_3\gamma_0}{\beta_1 - \alpha_1 + \beta_3\gamma_1}$$

$$\Pi_4 = -\frac{\alpha_1\beta_2}{\beta_1 - \alpha_1 + \beta_3\gamma_1}$$

$$\Pi_5 = \frac{\alpha_2\beta_1 + \alpha_2\beta_3\gamma_1 - \alpha_1\beta_3\gamma_2}{\beta_1 - \alpha_1 + \beta_3\gamma_1}$$

$$\Pi_6 = \frac{\alpha_0\gamma_1 - \alpha_1\gamma_0 + \beta_0\gamma_1 + \beta_1\gamma_0}{\beta_1 - \alpha_1 + \beta_3\gamma_1}$$

$$\Pi_7 = \frac{\gamma_1\beta_2}{\beta_1 - \alpha_1 + \beta_3\gamma_1}$$

$$\Pi_8 = \frac{\alpha_2\gamma_1 - \alpha_1\gamma_2 + \beta_1\gamma_2}{\beta_1 - \alpha_1 + \beta_3\gamma_1}$$

Podemos observar que hay una ecuación por cada parámetro de la forma reducida, lo que da 9 ecuaciones en total:

$$\Pi_0, \Pi_1, \Pi_2, \Pi_3, \Pi_4, \Pi_5, \Pi_6, \Pi_7, \Pi_8$$

Esto suma 9 ecuaciones en total. Asimismo habrán tantas incógnitas como parámetros de la forma estructural hayan:

$$\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \beta_0, \beta_1, \beta_2, \beta_3, \gamma_0, \gamma_1, \gamma_2$$

Lo que sumaría 10 incógnitas. Los parámetros de la forma reducida no son incógnitas ya que estos se pueden estimar fácilmente por MCO.

Teniendo 9 ecuaciones y 10 incógnitas, el modelo se encuentra subidentificado. Por lo que no es posible estimar todos sus parámetros de la forma estructural.

No obstante, que el modelo en su conjunto no se encuentre identificado, no implica que alguna de sus ecuaciones particulares no pueda estar identificada. En este caso particular, las ecuaciones (2.2) y (2.3) sí se encuentran exactamente identificadas, lo que significa que podemos estimar el valor de sus parámetros estructurales. Solo la ecuación (2.1) se encuentra subidentificada.

En los siguientes acápites mostraremos los métodos utilizados para determinar la identificación de cada ecuación: las condiciones de orden y de rango.

3.2. Condición de orden

La condición de orden es un análisis que se hace comparando el número de exógenas excluidas en cada ecuación con el número de endógenas incluidas (excluyendo la endógena al lado izquierdo). Para estructurar el análisis, es recomendable contabilizar las variables en las siguientes categorías:

- g: # de endógenas del sistema.
- g_j: # de endógenas en la ecuación j.
- K: # de exógenas en el sistema (tomando en cuenta la constante).
- k_j: # de exógenas en la ecuación j (tomando en cuenta la constante).

Para cada ecuación es necesario comparar el valor de $K - k_j$ con el de $g_j - 1$. Dependiendo de cuál sea mayor nos encontraremos en uno de los siguientes casos:

Tabla 1: Análisis de la condición de orden

Condición de orden	Resultado
$K - k_j > g_j - 1$	Sobreidentificado
$K - k_j = g_j - 1$	Exactamente identificado
$K - k_j < g_j - 1$	Subidentificado

Cabe mencionar que este método de identificación es condición necesaria y suficiente cuando se analiza un sistema de ecuaciones con 2 variables endógenas ($g = 2$).

A continuación, procederemos a aplicar este método al modelo estructural del mercado monetario:

$$M_t^d = \beta_0 + \beta_1 Y_t + \beta_2 R_t + \beta_3 P_t + \mu_{1t} \tag{2.1}$$

$$M_t^s = \alpha_0 + \alpha_1 Y_t + \alpha_2 P_{t-1} + \mu_{2t} \tag{2.2}$$

$$P_t = \gamma_0 + \gamma_1 Y_t + \gamma_2 P_{t-1} + \mu_{3t} \tag{2.3}$$

1. El primer paso es agrupar las variables ordenadamente:
   - Variables endógenas: M_t, Y_t y P_t.
   - Variables exógenas del sistema: $\mathbf{I}$, [2] R_t y P_{t-1}. [3]
2. En segundo lugar, contabilizaremos nuestras variables en los parámetros K, k_j, g y g_j:
   - g: # de endógenas del sistema. En este caso $g = 3$.
   - g_j: # de endógenas en la ecuación j. En este caso $g_1 = 3$, $g_2 = 2$ y $g_3 = 2$.
   - K: # de exógenas en el sistema. [4] En este caso $K = 3$.
   - k_j: # de exógenas en la ecuación j. [5] En este caso $k_1 = 2$, $k_2 = 2$ y $k_3 = 2$.
3. Para cada ecuación es necesario comparar el valor de $K - k_j$ con el de $g_j - 1$. En la siguiente tabla resumimos los 3 primeros pasos:

[2] Notar que se debe incluir la constante dentro de las exógenas.
[3] Todos los rezagos de las variables endógenas serán contabilizados también como exógenas.
[4] Tomar en cuenta la constante solo una vez.
[5] Tomar en cuenta la constante.

Tabla 2: Condición de orden en el modelo de mercado monetario

Ecuación	**K**	k_j	**g**	g_j	**Condición de orden**	**Resultado**
(2.1)	3	2	3	3	$K - k_j = 1 < 2 = g_j - 1$	Subidentificada
(2.2)	3	2	3	2	$K - k_j = 1 = g_j - 1$	Exactamente identificada
(2.3)	3	2	3	2	$K - k_j = 1 = g_j - 1$	Exactamente identificada

4. Analizamos cada ecuación en base al cumplimiento o incumplimiento de la condición de orden:

   - **Analizamos la ecuación de la demanda monetaria (2.1):** $K-k_1 = 1 < 2 = g_1-1$. La ecuación se encuentra subidentificada. No será posible obtener una solución a partir de los datos.
   - **Analizamos la ecuación de la oferta monetaria (2.2):** $K-k_2 = 1 = g_2 - 1$. La ecuación se encuentra exactamente identificada. Podemos hallar el valor de sus parámetros estructurales a partir de los datos.
   - **Analizamos la ecuación de la oferta agregada (2.3):** $K-k_3 = 1 = g_3 - 1$. La ecuación se encuentra exactamente identificada. Podemos hallar el valor de sus parámetros estructurales a partir de los datos.

3.3. Condición de rango

La condición de orden explicada en el subcapítulo anterior es una condición suficiente solo en el caso donde tenemos 2 ecuaciones simultáneas con 2 variables endógenas ($g = 2$). Para casos donde $g > 2$, es necesario realizar otro examen adicional que funja como condición suficiente: la condición de rango.

La condición de rango verifica que las variables exógenas excluidas de cada ecuación no sean linealmente dependientes entre sí, de modo que puedan identificarse exactamente los parámetros estructurales del modelo (Gujarati y Porter, 2009).

A continuación encontrará la lista de pasos detallados para evaluar esta condición. Seguiremos utilizando como ejemplo al modelo del mercado monetario (Ecuaciones (2.1), (2.2) y (2.3)).

1. Primero es necesario pasar todas las endógenas al lado izquierdo de las ecuaciones:

$$M_t - \beta_1 Y_t - \beta_3 P_t = \beta_0 + \beta_2 R_t + \mu_{1t} \tag{2.1*}$$

$$M_t - \alpha_1 Y_t = \alpha_0 + \alpha_2 P_{t-1} + \mu_{2t} \tag{2.2*}$$

$$-\gamma_1 Y_t + P_t = \gamma_0 + \gamma_2 P_{t-1} + \mu_{3t} \tag{2.3*}$$

2. Ahora expresamos el modelo en su forma matricial:

$$\begin{bmatrix} 1 & -\beta_1 & -\beta_3 \\ 1 & -\alpha_1 & 0 \\ 0 & -\gamma_1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_t \\ Y_t \\ P_t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \beta_0 & \beta_2 & 0 \\ \alpha_0 & 0 & \alpha_2 \\ \gamma_0 & 0 & \gamma_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{I} \\ R_t \\ P_{t-1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mu_{1t} \\ \mu_{2t} \\ \mu_{3t} \end{bmatrix} \tag{3.1}$$

Hay que notar que la ecuación anterior tiene la siguiente forma general que comparte con cualquier modelo de ecuaciones simultáneas:

$$\Gamma' Y_t = B' X_t + U_t \tag{3.2}$$

Donde Γ es una matriz cuadrada de dimensiones $g \times g$ que contiene los parámetros o constantes que multipliquen a las variables endógenas del modelo y B es una matriz de dimensiones $g \times k$ con los parámetros que multiplican a las variables exógenas del sistema. Hay que notar que en este caso B es una matriz cuadrada ya que $k = g = 3$, pero que esto no va a suceder siempre.

Cabe mencionar que la forma matricial especificada en (3.1) también es posible expresarla de la siguiente forma:

$$\begin{bmatrix} M_t & Y_t & P_t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -\beta_1 & -\alpha_1 & -\gamma_1 \\ -\beta_3 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & R_t & P_{t-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_0 & \alpha_0 & \gamma_0 \\ \beta_2 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_2 & \gamma_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mu_{1t} \\ \mu_{2t} \\ \mu_{3t} \end{bmatrix} \tag{3.3}$$

La cual finalmente tendrá la siguiente forma general, que es homologa a lo establecido en (3.2):

$$\Gamma = X_t B + U_t \tag{3.4}$$

3. Juntamos las matrices Γ y B verticalmente para crear la matriz con la que analizaremos la condición de rango.

$$\begin{bmatrix} \Gamma \\ - \\ B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -\beta_1 & -\alpha_1 & -\gamma_1 \\ -\beta_3 & 0 & 1 \\ - & - & - \\ \beta_0 & \alpha_0 & \gamma_0 \\ \beta_2 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_2 & \gamma_2 \end{bmatrix} \tag{3.5}$$

4. Aplicar el siguiente procedimiento a cada columna de la matriz anterior, donde cada una de estas representa una ecuación del modelo estructural, si y solo si la condición de orden indicó que la ecuación estaba identificada o sobreidentificada. No tiene caso evaluar la condición de rango si la condición de orden ya descartó una ecuación por encontrarse subidentificada.

    4.1. Tachar la columna de interés. Por ejemplo, si estamos analizando la ecuación de la oferta monetaria, tacharemos la segunda columna porque en esta se encuentran los parámetros de esta: 1,$-\alpha_1$, α_0 y α_2.

    4.2. En la(s) columna(s) que nos quede(n), tachamos todas las filas en donde la columna de interés tenga valores distintos de 0. Siguiendo el mismo ejemplo, en la fila que corresponde a la ecuación de la demanda monetaria habría que tachar todas las filas excepto la tercera y quinta (donde se encuentran $-\beta_3$ y β_2), y en la columna de la oferta agregada también habría que tachar todas excepto la tercera y quinta (donde se encuentran 1 y 0).

    4.3. Con los elementos que no hayan sido tachados, se forma una matriz y se calcula el rango de esta. [6] [7] Sobre el rango hallado se aplican las condiciones expuestas en la Tabla 3. Notar que la condición de rango es suficiente cuando el rango de la matriz simplficada es igual al número de endógenas del sistema menos uno. No obstante, necesitamos la condición de orden para poder distinguir si el modelo está exactamente identificado o sobreidentificado, lo cual no podríamos deducir de la condición de rango.

[6] El rango de una matriz es el número de filas (o columnas) de la mayor submatriz cuadrada no nula con un determinante distinto de 0. Por ejemplo, si tenemos la siguiente matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 5 & 0 \end{bmatrix}$, la mayor submatriz cuadrada no nula es $A_{sub} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$, cuyo determinante es $det(A_{sub}) = 1 \times 5 - 3 \times 2 = -1$. Por lo que el rango de esta matriz es 2.

[7] Otra forma de hallar el rango de una matriz es como el mínimo entre el número de filas independientes y columnas independientes:

$rango(A) = min(\#\text{filas independientes de } A, \#\text{columnas independientes de } A)$

Con este enfoque, se tendrían que ir eliminando las columnas (o filas) que estén llenas de ceros o que sean proporcionales a otras columnas (o filas) y luego contar las restantes como las independientes.

Tabla 3: Análisis de la condición de Rango

Condición de orden	**Condición de rango**	**Resultado**
$K - k_j > g_j - 1$	Rango de $\begin{bmatrix}\Gamma \\ - \\ B\end{bmatrix}$ simplificada $> g-1$	Sobreidentificado
$K - k_j = g_j - 1$	Rango de $\begin{bmatrix}\Gamma \\ - \\ B\end{bmatrix}$ simplificada $= g-1$	Exactamente identificado
$K - k_j \geq g_j - 1$	Rango de $\begin{bmatrix}\Gamma \\ - \\ B\end{bmatrix}$ simplificada $< g-1$	Subidentificada
$K - k_j < g_j - 1$	No se analiza	Subidentificado

- Para la ecuación de la oferta de dinero (M^s) se cumple que $Rango[A_D] = g - 1$, por lo que está exactamente identificada.

$$Rango \begin{bmatrix} \cancel{1} & \cancel{1} & \cancel{0} \\ \cancel{-\beta_1} & \cancel{-\alpha_1} & \cancel{-\gamma_1} \\ -\beta_3 & \cancel{0} & 1 \\ - & - & - \\ \cancel{\beta_0} & \cancel{\alpha_0} & \cancel{\gamma_0} \\ \beta_2 & \cancel{0} & 0 \\ \cancel{0} & \cancel{\alpha_2} & \cancel{\gamma_2} \end{bmatrix} = Rango \begin{bmatrix} -\beta_3 & 1 \\ \beta_2 & 0 \end{bmatrix} = 2 \tag{3.6}$$

- Para la ecuación de la oferta agregada (P_t) se cumple que $Rango[A_D] = g - 1$, por lo que está exactamente identificada.

$$Rango \begin{bmatrix} 1 & 1 & \cancel{0} \\ \cancel{-\beta_1} & \cancel{-\alpha_1} & \cancel{-\gamma_1} \\ \cancel{-\beta_3} & \cancel{0} & \cancel{1} \\ - & - & - \\ \cancel{\beta_0} & \cancel{\alpha_0} & \cancel{\gamma_0} \\ \beta_2 & 0 & \cancel{0} \\ \cancel{0} & \cancel{\alpha_2} & \cancel{\gamma_2} \end{bmatrix} = Rango \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ \beta_2 & 0 \end{bmatrix} = 2 \tag{3.7}$$

Finalmente, recordamos de lo mencionado anteriormente que, dado que la ecuación de la demanda de dinero (M_d) está subidentificada, no se analizará la condición de rango como se especifica también en la Tabla 3.

4

Métodos de estimación

4.1. Forma incorrecta: aplicación del estimador de MCO al modelo del mercado de dinero

En la Tabla 4 se presenta la tabla de resultados de la estimación de las ecuaciones incluídas en el modelo de mercado de dinero, [8] a través del Método de Mínimos Cuadrados Ordinario (MCO) con información trimestral del Banco Central de Reserva del Perú entre el primer trimestre del 2004 y el último del 2019. [9]

Respecto a los resultados obtenidos, es posible encontrar la ausencia de significancia de variables relevantes, al menos para el modelo (1) y (2). Asimismo, dada la naturaleza de simultaneidad que se ha identificado previamente, los parámetros están sesgados en términos de magnitud y significancia, ya que violan el supuesto de no correlación entre las variables explicativas y el error.

Para ejemplificar este último punto, utilizaremos la ecuación en forma reducida de Y_t:

$$\begin{aligned} Y_t = \frac{\alpha_0 - \beta_0 - \beta_0\gamma_3}{\beta_1 - \alpha_1 + \beta_3\gamma_1} - \frac{\beta_2}{\beta_1 - \alpha_1 + \beta_3\gamma_1} R_t \\ + \frac{\alpha_2 - \beta_3\gamma_2}{\beta_1 - \alpha_1 + \beta_3\gamma_1} P_{t-1} + \frac{\mu_{2t} - \mu_{1t} - \beta_3\mu_{3t}}{\beta_1 - \alpha_1 + \beta_3\gamma_1} \end{aligned} \tag{2.9}$$

Aplicando el operador esperanza a esta ecuación obtenemos el valor esperado de Y_t:

[8] Sección 2.1, ecuaciones 2.1, 2.2 y 2.3.

[9] Especificaciones de las series usadas se presentan en el **Anexo**.

$$E[Y_t] = \frac{\alpha_0 - \beta_0 - \beta_0\gamma_3}{\beta_1 - \alpha_1 + \beta_3\gamma_1} - \frac{\beta_2}{\beta_1 - \alpha_1 + \beta_3\gamma_1} R_t + \frac{\alpha_2 - \beta_3\gamma_2}{\beta_1 - \alpha_1 + \beta_3\gamma_1} P_{t-1}$$

Como consecuencia, la desviación de Y_t respecto a su media estará dada por:

$$Y_t - E[Y_t] = \frac{\mu_{2t} - \mu_{1t} - \beta_3\mu_{3t}}{\beta_1 - \alpha_1 + \beta_3\gamma_1}$$

Finalmente, con esta última expresión es fácil verificar que existe covarianza entre Y_t y los errores estructurales de las ecuaciones (2.1), (2.2) y (2.3):

$$cov(Y_t, \mu_{1t}) = E[(Y_t - E(Y_t))(\mu_{1t} - E[\mu_{1t}])] = \frac{-\sigma_1^2}{\beta_1 - \alpha_1 + \beta_3\gamma_1}$$
$$cov(Y_t, \mu_{2t}) = E[(Y_t - E(Y_t))(\mu_{2t} - E[\mu_{2t}])] = \frac{\sigma_2^2}{\beta_1 - \alpha_1 + \beta_3\gamma_1}$$
$$cov(Y_t, \mu_{3t}) = E[(Y_t - E(Y_t))(\mu_{3t} - E[\mu_{3t}])] = \frac{-\beta_3\sigma_2^2}{\beta_1 - \alpha_1 + \beta_3\gamma_1}$$

Dado que Y_t es una variable explicativa en las 3 ecuaciones de nuestro modelo, esta demostración basta para demostrar que los estimadores utilizados en la Tabla 4 son sesgados.

Tabla 4: Estimación del Modelo de mercado de dinero por MCO

Variables	(1) ${M_t}^d$	(2) ${M_t}^s$	(3) P_t
Y_t	1.876***	1.946***	0.0145*
	(0.201)	(0.192)	(0.00829)
R_t	0.0270		
	(0.0435)		
P_t	0.327		
	(0.569)		
P_{t-1}		0.124	0.956***
		(0.540)	(0.0234)
Constante	-12.09***	-11.93***	0.0431*
	(0.574)	(0.545)	(0.0236)
Observaciones	64	64	64
R-cuadrado	0.979	0.979	0.999

Errores estándar robustos en paréntesis
*** p<0.01, ** p<0.05, * p<0.1

Por tal motivo, será necesario recurrir a un método alternativo al MCO que nos permita tener certeza respecto a que los resultados sobre los coeficientes estimados son insesgados y consistentes.

4.2. Caso exactamente identificado: Mínimos Cuadrados Indirectos (MCI)

Cuando alguna de las ecuaciones del modelo se encuentra exactamente identificada, podemos utilizar el método de Mínimos Cuadrados Indirectos (MCI). Este método consiste en despejar los valores de los parámetros de la forma estructural en función de los parámetros de la forma reducida.

En este caso aplicaremos el método al modelo del mercado de dinero ((2.1),(2.2) y (2.3)), donde las ecuaciones de oferta monetaria (2.2) y de oferta agregada (2.3) se encuentran exactamente identificadas.

$$M_t^d = \beta_0 + \beta_1 Y_t + \beta_2 R_t + \beta_3 P_t + \mu_{1t} \tag{2.1}$$

$$M_t^s = \alpha_0 + \alpha_1 Y_t + \alpha_2 P_{t-1} + \mu_{2t} \tag{2.2}$$

$$P_t = \gamma_0 + \gamma_1 Y_t + \gamma_2 P_{t-1} + \mu_{3t} \tag{2.3}$$

El método es el siguiente:

(i) El primer paso es plantear el modelo en su forma reducida. En este caso, se trata de las ecuaciones (2.4), (2.5) y (2.6):

$$Y_t = \Pi_0 + \Pi_1 R_t + \Pi_2 P_{t-1} + v_{1t} \tag{2.4}$$

$$M_t = \Pi_3 + \Pi_4 R_t + \Pi_5 P_{t-1} + v_{2t} \tag{2.5}$$

$$P_t = \Pi_6 + \Pi_7 R_t + \Pi_8 P_{t-1} + v_{3t} \tag{2.6}$$

(ii) Una vez planteado el modelo en forma reducida, estimamos sus parámetros (Π_i) por MCO.
En este modelo tenemos 9 parámetros de forma reducida (Π_j) distribuidos en 3 ecuaciones. Es necesario estimar cada una de estas ecuaciones por MCO para poder hallarlos todos. El proceso a seguir es el siguiente:

1. Definimos la ecuación reducida (2.4) en su forma matricial:

$$Y = X\overrightarrow{\Pi} + \overrightarrow{v_1}$$

En esta definición anterior $X = (\mathbf{I}, R, P_{-1})$ es una matriz con toda la muestra de las variables exógenas del modelo y un vector de unos en la primera columna. Y es un vector con los valores de Y_t para $t = 1, 2, ..., T$.

2. Aplicamos la formula estándar de MCO

$$\hat{\Pi}_{MCO} = \begin{pmatrix} \hat{\Pi}_0 \\ \hat{\Pi}_1 \\ \hat{\Pi}_2 \end{pmatrix} = (X'X)^{-1}(X'Y) \tag{4.1}$$

3. En este punto ya estimamos los 3 primeros parámetros de forma reducida. Tendríamos que repetir el proceso para las ecuaciones (2.5) y (2.6) con la diferencia de que la fórmula de MCO variaría ligeramente:

$$\hat{\Pi}^{(1,5)}_{MCO} = \begin{pmatrix} \hat{\Pi}_3 \\ \hat{\Pi}_4 \\ \hat{\Pi}_5 \end{pmatrix} = (X'X)^{-1}(X'M) \tag{4.2}$$

$$\hat{\Pi}^{(1,6)}_{MCO} = \begin{pmatrix} \hat{\Pi}_6 \\ \hat{\Pi}_7 \\ \hat{\Pi}_8 \end{pmatrix} = (X'X)^{-1}(X'P) \tag{4.3}$$

(iii) Despejar los parámetros de forma estructural en función de los parámetros de la forma reducida.
En la sección 2.2.1 despejamos los parámetros de forma reducida en función de los parámetros estructurales. En este paso debemos hacer el proceso inverso.
Por ejemplo, habíamos definido Π_4 y Π_1 de la forma siguiente:

$$\Pi_1 = -\frac{\beta_2}{\beta_1 - \alpha_1 + \beta_3\gamma_1}$$

$$\Pi_4 = -\frac{\alpha_1\beta_2}{\beta_1 - \alpha_1 + \beta_3\gamma_1}$$

Si dividimos Π_4 entre Π_1 podemos despejar el parámetro estructural α_1.

$$\frac{\Pi_4}{\Pi_1} = \frac{-\frac{\alpha_1\beta_2}{\beta_1-\alpha_1+\beta_3\gamma_1}}{-\frac{\beta_2}{\beta_1-\alpha_1+\beta_3\gamma_1}} = \alpha_1$$

Por lo que nuestro estimador de MCI para α_1 vendrá dado por la siguiente ecuación:

$$\alpha_1^{MCI} = \frac{\hat{\Pi}_4}{\hat{\Pi}_1} \tag{4.4}$$

Donde $\hat{\Pi}_4$ y $\hat{\Pi}_1$ fueron estimados por MCO en el punto anterior (ii). También podemos despejar α_2 si restamos $\alpha_1\Pi_2$ de Π_5:

$$\Pi_5 - \alpha_1\Pi_2 = \frac{\alpha_2\beta_1 + \alpha_2\beta_3\gamma_1 - \alpha_1\beta_3\gamma_2}{\beta_1 - \alpha_1 + \beta_3\gamma_1} - \alpha_1\frac{\alpha_2 - \beta_3\gamma_2}{\beta_1 - \alpha_1 + \beta_3\gamma_1}$$

$$\Pi_5 - \alpha_1\Pi_2 = \frac{\alpha_2\beta_1 + \alpha_2\beta_3\gamma_1 - \alpha_1\beta_3\gamma_2 - \alpha_1\alpha_2 + \alpha_1\beta_3\gamma_2}{\beta_1 - \alpha_1 + \beta_3\gamma_1}$$

$$\Pi_5 - \alpha_1\Pi_2 = \frac{\alpha_2(\beta_1 - \alpha_1 + \beta_3\gamma_1)}{\beta_1 - \alpha_1 + \beta_3\gamma_1} = \alpha_2$$

Por lo que nuestro estimador de MCI para α_2 vendrá dado por la siguiente ecuación:

$$\alpha_2^{MCI} = \hat{\Pi}_5 - \alpha_1\hat{\Pi}_2 \tag{4.5}$$

Donde $\hat{\Pi}_5$ y $\hat{\Pi}_2$ fueron estimados por MCO en el punto anterior (ii). Para terminar de estimar los parámetros de la ecuación de la oferta monetaria, despejamos α_0 restando $\alpha_1\Pi_0$ de Π_3:

$$\Pi_3 - \alpha_1\Pi_0 = \frac{\alpha_0\beta_1 - \alpha_1\beta_0 + \alpha_0\beta_3\gamma_1 + \alpha_1\beta_3\gamma_1}{\beta_1 - \alpha_1 + \beta_3\gamma_1} - \alpha_1\frac{\alpha_0 - \beta_0 - \beta_3\gamma_0}{\beta_1 - \alpha_1 + \beta_3\gamma_1}$$

$$\Pi_3 - \alpha_1\Pi_0 = \frac{\alpha_0\beta_1 - \alpha_1\beta_0 + \alpha_0\beta_3\gamma_1 - \alpha_1\beta_3\gamma_0 - \alpha_0\alpha_1 + \alpha_1\beta_0 + \alpha_1\beta_3\gamma_0}{\beta_1 - \alpha_1 + \beta_3\gamma_1}$$

$$\Pi_3 - \alpha_1\Pi_0 = \frac{\alpha_0(\beta_1 - \alpha_1 + \beta_3\gamma_1)}{\beta_1 - \alpha_1 + \beta_3\gamma_1} = \alpha_0$$

Por lo que nuestro estimador de MCI para α_0 vendrá dado por la siguiente ecuación:

$$\alpha_0^{MCI} = \hat{\Pi}_3 - \alpha_1\hat{\Pi}_0 \tag{4.6}$$

Donde $\hat{\Pi}_3$ y $\hat{\Pi}_0$ fueron estimados por MCO en el punto anterior (ii). Análogamente, se pueden despejar los parámetros estructurales de la ecuación de la oferta agregada (γ_0, γ_1 y γ_2), ya que esta también se encuentra exactamente identificada. Los estimadores serían los siguientes:

$$\gamma_0^{MCI} = \hat{\Pi}_6 - \gamma_1\hat{\Pi}_0 \tag{4.7}$$

$$\gamma_1^{MCI} = \frac{\hat{\Pi}_7}{\hat{\Pi}_1} \tag{4.8}$$

$$\gamma_2^{MCI} = \hat{\Pi}_8 - \gamma_1\hat{\Pi}_2 \tag{4.9}$$

4.2.1. Nota sobre el cálculo de las varianzas del estimador de MCI

Para poder hacer exámenes estadísticos y hallar los niveles de significancia de los parámetros de MCI, es necesario contar con la matriz de varianzas-covarianzas de estos estimadores.

Para poder hallar esta matriz utilizaremos el método de Kmenta (1971). Este autor sotiene que el método de MCI es equivalente al método de variables instrumentales aplicado a todas las ecuaciones exactamente identificadas del modelo.

Por ejemplo, tomemos la ecuación de la oferta monetaria (2.2):

$$M_t^s = \alpha_0 + \alpha_1 Y_t + \alpha_2 P_{t-1} + \mu_{2t} \tag{2.2}$$

1. Primero, expresamos la ecuación a estimar de las siguiente forma:

$$M = Z\alpha + u \tag{4.10}$$

   Donde M es un vector de $T \times 1$ dimensiones con todas las observaciones de M_t^s de distintos periodos, u es un vector de $T \times 1$ dimensiones con los errores de todos los periodos y Z es una matriz de $T \times (g_j + k_j - 1)$ (en este caso $T \times 3$) dimensiones formada de la siguiente manera: [10]

$$Z = [Y \; P_{-1} \; \iota]$$

   Lo importante de este es rescatar la matriz Z. Prestar atención al orden en el que las variables deben colocarse en esta.

2. En segundo lugar hay que construir una matriz W de $T \times K$ dimensiones con todas las variables exógenas del modelo:

$$W = [\underline{X_j} \; X_j]$$

   Donde $\underline{X_j}$ es una matriz de $T \times (K - k_j)$ con todas las variables exógenas excluidas de la ecuación j y X_j es una matriz de $T \times k_j$ dimensiones con las variables exógenas incluidas en la ecuación j. Para el caso concreto de la ecuación (2.2), esta matriz estaría compuesta de la siguiente manera: [11]

[10] Notar que incluimos las endógenas del modelo incuídas en la ecuación al comienzo (Y), luego las exógenas incluidas (P_{-1}) y finalmente el vector de unos para el intercepto (ι).

[11] Notar que las variables correspondientes a X_j aparecen en el mismo orden en el que fueron nombradas en la matriz Z.

$$W = [R\, P_{-1}\, \iota]$$

3. La varianza de los estimadores (α_j y γ_j) tienen dos componentes: (1) la varianza de los errores (μ_j) y (2) una matriz con la varianza de las variables exógenas.

   Estimamos la varianza de los errores (μ_j) por la siguiente fórmula:

$$\hat{\sigma}_2^2 = \frac{(M - Z\alpha)'(M - Z\alpha)}{T - (g_j - 1) - k_j} \tag{4.11}$$

   Con el estimado de la varianza de los errores podemos calcular ya las varianzas de los parámetros. Aplicamos la siguiente fórmula:

$$\Sigma_\alpha = \hat{\sigma}_2^2 (W'Z)^{-1}(W'W)(Z'W)^{-1} \tag{4.12}$$

4. La matriz Σ_α tiene $(g_j + k_j - 1) \times (g_j + k_j - 1)$ dimensiones (en este caso 3×3). Los elementos de su diagonal principal corresponden a las varianzas de los parámetros estructurales.[12]

5. La matriz Σ_α solo contiene la varianza de los estimadores de los parámetros estructurales de la ecuación (2.2). Es necesario repetir el proceso completo para cada ecuación exactamente identificada del modelo.

4.2.2. Aplicación en MATLAB: Modelo del mercado de dinero

Los estimadores de MCI tienen formas funcionales muy particulares que varían de modelo en modelo. Por lo tanto, *softwares* de código cerrado como STATA no tienen funciones incorporadas que hagan los cálculos necesarios para hallar los estimados específicos de este modelo.

Por lo tanto, consideramos apropiado realizar los cálculos en MATLAB. Donde se puede observar más claramente el proceso descrito en la sección anterior (3.2). Los pormenores del código serán explicados a detalle en el **Anexo**.

Los resultados obtenidos son los siguientes:

[12] Notar que las varianzas estarán en el orden en el que se hayan incluido las variables en el vector Z. En este caso las incluimos en el orden Y, P_{-1} e ι; por lo que el elemento $\Sigma^\alpha_{1,1}$ corresponderá a la varianza de α_1, el elemento $\Sigma^\alpha_{2,2}$ a la varianza de α_2 y $\Sigma^\alpha_{3,3}$ a la varianza de α_0.

Tabla 5: Estimación del Modelo de mercado de dinero por MCI

Variables	(1.2) M_t^s	(1.3) P_t
Y_t	2.377***	0.091**
	(0.772)	(0.036)
P_{t-1}	-1.068	0.745***
	(2.136)	(0.137)
Constante	-11.38***	0.139**
	(1.093)	(0.07)
Observaciones	64	64
R-cuadrado	0.977	0.997

Errores estándar robustos en paréntesis
*** p<0.01, ** p<0.05, * p<0.1

4.3. Caso sobreidentificado: Mínimos Cuadrados en 2 Etapas (MC2E)

En esta sección trabajaremos con el siguiente modelo de determinación de la oferta monetaria, donde Y_t corresponde al ingreso nacional y M_t^s a la oferta monetaria:

$$Y_t = \beta_0 + \beta_1 M_t^s + \gamma_1 I_t + \gamma_2 G_t + u_{1t} \tag{4.13}$$

$$M_t^s = \alpha_0 + \alpha_1 Y_t + u_{2t} \tag{4.14}$$

Adicionalamente al modelo anteriormente mostrado, se incorpora la variable exógena I_t, que corresponde al monto de inversión en formación de capital fijo, y G_t, que consiste en el monto del gasto público. Además, $u_{it} \sim N(0, \sigma_i^2)$ para $i = 1, 2$.

A continuación, se procederá a estimar la ecuación de la oferta monetaria utilizando el método de mínimos cuadrados en 2 etapas (MC2E).

Primera etapa

1. Planteamos la forma reducida del modelo:
En la forma reducida tenemos una ecuación por variable endógena y en cada ecuación solo puede aparecer una variable endógena, la cual es determinada por una función de todas las variables exógenas.

$$Y_t = \Pi_0 + \Pi_1 I_t + \Pi_2 G_t + v_{1t} \tag{4.15}$$

$$M_t^s = \Pi_3 + \Pi_4 I_t + \Pi_5 G_t + v_{2t} \tag{4.16}$$

2. Verificamos por medio de la condición de orden que la ecuación (4.14) se encuentra sobreidentificada.

   - La ecuación (4.13) no excluye ninguna variable exógena ($K - k_1 = 0$) e incluye ambas variables endógenas de la ecuación ($g_1 - 1 = 1$). Dado que $K - k_1 < g_1 - 1$, la ecuación se encuentra subidentificada.
   - La ecuación (4.14) excluye 2 variables exógenas ($K - k_2 = 2$) e incluye ambas variables endógenas de la ecuación ($g_2 - 1 = 1$). Dado que $K - k_2 > g_2 - 1$, la ecuación se encuentra sobreidentificada.

   Hay que notar que el método de MC2E nos permite estimar los parámetros de ecuaciones **sobreidentificadas** mas no de las subidentificadas, por lo que los parámetros de la ecuación (4.12) no podrán ser estimados.

3. Estimar la ecuación en forma reducida de Y por MCO.

$$\hat{\Pi}_{MCO} = \begin{pmatrix} \hat{\Pi}_0 \\ \hat{\Pi}_1 \\ \hat{\Pi}_2 \end{pmatrix} = (X'X)^{-1}(X'Y_1) \tag{4.17}$$

   Donde $X = (\mathbf{I}, I_t, G_t)$ y Y_1 es un vector con los valores de Y_t para $t = 1, 2, ..., T$.

4. Hallamos $E[Y_t] = \hat{Y}_t$ y lo expresamos como una función lineal de las variables exógenas X_{it}.
   Planteamos:

$$E[Y_t] = \hat{Y}_t = \hat{\Pi}_0 + \hat{\Pi}_1 I_t + \hat{\Pi}_2 G_t + E[v_{1t}] \tag{4.18}$$

$$\hat{Y}_t = \hat{\Pi}_0 + \hat{\Pi}_1 I_t + \hat{\Pi}_2 G_t \tag{4.19}$$

Segunda etapa

5. Introducimos $Y_t = \hat{Y}_t + v_{1t}$ en la ecuación estructural de la oferta monetaria (4.13).

$$M_t^s = \alpha_0 + \alpha_1(\hat{Y}_t + \hat{v}_{1t}) + u_{2t} \tag{4.20}$$

$$M_t^s = \alpha_0 + \alpha_1 \hat{Y}_t + (\alpha_1 \hat{v}_{1t} + u_{2t}) \tag{4.21}$$

$$M_t^s = \alpha_0 + \alpha_1 \hat{Y}_t + u_t^* \tag{4.22}$$

   Donde $u_t^* = \alpha_1 \hat{v}_{1t} + u_{2t}$.

6. Estimar la ecuación estructural de la forma monetaria por MCO.

$$\hat{\beta}_{MC2E} = \begin{pmatrix} \hat{\alpha}_0 \\ \hat{\alpha}_1 \end{pmatrix} = (\hat{Y_1^*}'\hat{Y_1^*})^{-1}(\hat{Y_1^*}'M_t^s) \tag{4.23}$$

Donde $\hat{Y_1^*} = (\mathbf{I}, \hat{Y_1})$ y Y_2 es un vector con los valores de M_t^s para $t = 1, 2, ..., T$.
$\hat{\beta}_{MC2E}$ es el vector con los estimadores de MC2E para la ecuación de la oferta monetaria (4.14).

4.3.1. Aplicación en STATA: Modelo de oferta monetaria

En la Tabla 6 se presenta la estimación del Modelo de oferta monetaria sin incorporar la existencia de simultaneidad en la regresión. El problema que ello generaría, como se ha especificado antes, es que podríamos estar obteniendo coeficientes sesgados dado la codependencia que existe entre la relación de Y_t (el PBI) y M_t^s (la oferta monetaria). En este sentido, los resulados de la Tabla no serían más adecuados dado el problema de cálculo de estos.

Tabla 6: Estimación del Modelo de oferta monetaria por MCO

Variables	(1) Y_t	(2) M_t^s
Y_t		1.989***
		(0.0369)
M_t^s	0.434***	
	(0.0239)	
I_t	0.0187	
	(0.0276)	
G_t	0.127***	
	(0.0384)	
Constante	5.328***	-11.85***
	(0.277)	(0.430)
Observaciones	64	64
R-cuadrado	0.982	0.979

Errores estándar en paréntesis
*** p<0.01, ** p<0.05, * p<0.1

Por lo que, dado lo problemático que resultaría el obtener coeficientes sesgados cuando se hace el análisis del Modelo de oferta monetaria, y dado que hemos comprobado que este modelo se caracteriza por ser estar sobre-identificada, podemos utilizar la estimación por Mínimos Cuadrados en 2

Etapas (MC2E) para corregir el problema de simultaneidad que se presenta para Y_t y M_t^s. Los resultados de dicha estimación se presentan en la Tabla 7 de dos formas.

La columna (1) y (2) hacen referencia a la estimación de MC2E de forma manual, es decir, realizamos los siguientes pasos en la estimación:

- Estimamos en la primera etapa la ecuación de determinación del PBI, para hallar cuál es el valor estimado del PBI o $\hat{Y}_t$. Dicho cálculo está representado en la columna (1).

- Posteriormente, con el valor de $\hat{Y}_t$, esta variable es considerada para la estimación de la segunda etapa que implica el hallar la oferta monetaria. Dicho cálculo está representado en la columna (2).

Finalmente, la columna (3) representa la estimación de la oferta monetaria a partir del uso del comando de Stata *ivregress 2sls* para obtener de forma directa la estimación de la oferta monetaria, que incluye per-se la estimación del PBI. En este sentido, si observamos los coeficientes de $\hat{Y}_t$ en la estimación manual y de Y_t en la estimación directa, se obtiene que a nivel son iguales a nivel de significancia y magnitud, aunque a sobre la varianza varían ligeramente.

Tabla 7: Estimación del Modelo de oferta monetaria por MC2E

	(1)	(2)	(3)
Variables	Y_t	M_t^s	M_t^s
I_t	0.375***		
	(0.0491)		
G_t	0.664***		
	(0.0621)		
$\hat{Y}_t$		1.994***	
		(0.0972)	
Y_t			1.994***
			(0.0386)
Constante	1.582***	-11.91***	-11.91***
	(0.469)	(1.129)	(0.449)
Observaciones	64	64	64
R-cuadrado	0.885	0.871	0.979

Errores estándar en paréntesis
*** p<0.01, ** p<0.05, * p<0.1

4.4. Mínimos Cuadrados en 3 Etapas (MC3E)

El método de Minimos Cuadrados en 3 Etapas (MC3E) consiste en ser una estrategia econométrica que permite estimar un sistema de ecuaciones a partir de un modelo estructural. No obstante, para poder realizarlo, este requiere de que todas las ecuaciones estén exactamente o sobre identificadas.

Para ejemplicar cómo es que se opera una estimación de MC3E, utilizaremos el modelo de oferta monetaria de la sección 4.2 y agregaremos los precios como una variable explicativa adicional en la ecuación de oferta monetaria expresada en (4.24).

$$Y_t = \beta_0 + \beta_1 M_t^s + \gamma_1 I_t + \gamma_2 G_t + u_{1t} \tag{4.13}$$

$$M_t^s = \beta_2 + \beta_3 Y_t + \beta_{22} P_{t-1} + u_{2t} \tag{4.24}$$

Supongamos que normalizamos G ecuaciones cada una con respecto a cada una de las variables endógenas del modelo y consideramos el siguiente sistema de las G ecuaciones:

$$y_{1t} = \hat{Y}_1 \beta_1 + X_1 \gamma_1 + u_{1t}^* \tag{4.25}$$

$$y_{2t} = \hat{Y}_2 \beta_2 + X_2 \gamma_2 + u_{2t}^* \tag{4.26}$$

También podemos reexpresar (4.13) y (4.24) de forma más compacta de la siguiente manera:

$$\underbrace{y_j}_{\text{Tx1}} = \underbrace{\hat{Y}_j}_{\text{Tx}G_j} \underbrace{\beta_j}_{G_j\text{x1}} + \underbrace{X_j}_{\text{Tx}K_j} \underbrace{\gamma_j}_{K_j\text{x1}} + \underbrace{u_j^*}_{\text{Tx1}}, J = 1, 2 \tag{4.27}$$

Dado que en nuestro modelo solo tenemos dos variables endógenas, G es igual a 2. Dicho lo anterior, podemos reexpresar la expresión:

$$\underbrace{y_j}_{\text{Tx1}} = \underbrace{\hat{Y}_j}_{\text{Tx2}} \underbrace{\beta_j}_{\text{2x1}} + \underbrace{X_j}_{\text{Tx}K_j} \underbrace{\gamma_j}_{K_j\text{x1}} + \underbrace{u_j^*}_{\text{Tx1}}, J = 1, 2 \tag{4.28}$$

o de forma más compacta:

$$\underbrace{y_j}_{\text{Tx1}} = \underbrace{\hat{Z}_j}_{\text{Tx}(2+K_j)} \underbrace{\delta_j}_{(2+K_j)\text{x1}} + \underbrace{u_j^*}_{\text{Tx1}}, J = 1, 2 \tag{4.29}$$

Siendo $\hat{Z}_j = [Y_j X_j]$, $\delta_j = [\beta_j \gamma_j]'$, $u_j \sim (0, \sigma_j^2 I_T), E(u_i u_j{}') = \sigma_{ij} I_T$

Matricialmente nos quedaríamos con la siguiente expresión:

$$\underbrace{y}_{\text{2Tx1}} = \underbrace{Z}_{\text{2Tx2}}\underbrace{\delta}_{\text{2x1}} + \underbrace{u}_{\text{2Tx1}} \tag{4.30}$$

Posteriormente, podemos expresar el valor de $\hat{\delta}$ de la siguiente manera:

$$\hat{\delta} = (Z^* \sum\nolimits^{-1} \otimes (X'X)^{-1}) Z^*)^{-1} (Z^* \sum\nolimits^{-1} \otimes (X'X)^{-1}) y) \tag{4.31}$$

De la expresión anterior, procedemos a definir Z^* y y, para luego incorporarlos en la expresión (4.32). En este sentido, tenemos que $Z^* = (I \otimes X')Z$ y $y^* = (I \otimes X')y$.

Las matrices Z^* y y pueden reexpresarse al incorporar la matriz de proyección P_x, como se muestra a continuación:[13]

$Z'(\sum^{-1} \otimes P_x)Z = WZ$ y $Z'(\sum^{-1} \otimes P_x)y = Wy$

No obstante, sobre esta definición aún queda pendiente conocer el estimador para $\sum$. Por tal motivo, se procede a definir un estimador consistente para $\sum$, a partir de la varianza de ij (σ_{ij}^2):

$\sigma_{ij}^2 = \frac{1}{T} \hat{u_i}' \hat{u_j}$, para i=1,2 y j=1,2

donde $\hat{u_i} = y_i - Z_i \delta_i^{M\hat{C}2E}$ y $\delta_i^{M\hat{C}2E}$ es el estimador de los coeficientes la estimación de la ecuación por MC2E. Sustituyendo obtenemos la expresón del estimador de MC3E:

$\sigma_{ij}^2 = \frac{1}{T} \hat{u_i}' \hat{u_j}$, para i=1,2 y j=1,2

donde $\hat{u_i} = y_i - Z_i \delta_i^{M\hat{C}2E}$ y $\delta_i^{M\hat{C}2E}$ es el estimador de los coeficientes la estimación de la ecuación por MC2E. Sustituyendo obtenemos la expresón del estimador de MC3E:

$$\hat{\delta}^{MC3E} = (Z'(\hat{\sum}^{-1} \otimes P_x)Z)^{-1} (Z'(\hat{\sum}_x^{-1})y) \tag{4.32}$$

[13]La definición de la matriz de proyección P_x dentro de Z^* y y^* se muestra en el **Anexo**.

La expresión (4.33) también se puede reescribir el estimador en términos de $\hat{W}$, el cual fue definido previamente.

$$\hat{\delta}^{MC3E} = (\hat{W}Z)^{-1}(\hat{W}y) \tag{4.33}$$

Del proceso de estimación de MC3E podemos mencionar que es posible encontrar el estimador a partir de calcular los residuos del parámetro de tres etapas estimados, es decir, hallando $\hat{\sum}$, y calculando nuevamente los parámetros. Dicho procedimiento se deberá realizar hasta cuando se logre que $\hat{\delta}^{MC3E}$ logre converger a su valor de equilibrio.

4.4.1. Aplicación en STATA: Determinación de la oferta monetaria

Finalmente, dado el ejemplo presentado anteriormente, se presenta la estimación por MC3E para la determinación de la oferta monetaria. Para poder ejemplificar cómo es que el modelo funcionaría en este caso, se ha incluido una variable independiente adicional P_{t-1} (el precio en el periodo anterior) para determinar Y_t.

Si comparamos los resultados presentados en la Tabla 7 y 8, se encuentra que el resultado de la estimación de Y_t no cambia drásticamente, al igual que para M_t^s. Ello se justifica porque se espera que de la estimación de MC3E, a diferencia de la estimación de MC2E, genere estimaciones más precisas de los parámetros dada la validez de la especificación del modelo, así como también del control de las covarianzas entre las perturbaciones. [14]

[14] Fecha de consulta: 25 de octubre de 2021. Enlace: https://www.stata.com/manuals13/rreg3.pdf

Tabla 8: Estimación del Modelo de oferta monetaria por MC3E

Variables	(1) Y_t	(2) M_t^s
M_t^s	0.514***	
	(0.0257)	
G_t	-0.0168	
	(0.0277)	
I_t	-0.0116	
	(0.0282)	
Y_t		2.103***
		(0.204)
P_{t-1}		-0.310
		(0.573)
Constante	6.105***	-11.73***
	(0.280)	(0.544)
Observaciones	64	64
R-cuadrado	0.978	0.979

Errores estándar en paréntesis
*** p<0.01, ** p<0.05, * p<0.1

5

Anexos

5.1. Lista de Acrónimos

Tabla 9: Acrónimos utilizados

BCRP	Banco Central de Reserva del Perú
IPC	Índice de Precios al Consunidor
MCI	Mínimos Cuadrados Indirectos
MCO	Mínimos Cuadrados Ordinarios
MES	Modelos de Ecuaciones Simutéaneas
MC2E	Mínimos Cuadrados en 2 Etapas
MC3E	Mínimos Cuadrados en 3 Etapas
PBI	Producto Bruto Interno

5.2. Especificaciones de Base de datos utilizada

Tabla 10: Datos para la estimación de modelo

Periodo	2004-2019
Frecuencia	Trimestral
Fuente	Banco Central de Reserva del Perú (BCRP)
Fecha de recuperación	1 de octubre del 2020
Variables	**Descripción**
Producto Bruto Interno Y_t, Y_{1t}	Producto bruto interno por tipo de gasto (millones S/)
Oferta Monetaria M_t, Y_{2t}	Liquidez en Soles (millones S/)
Tasa de interés R_t	Tasa de Referencia de la Política Monetaria (BCRP)
Precios actuales P_t	Índice de Precios al Consumidor (IPC)
Precios periodo anterior P_{t-1}	Índice de Precios al Consumidor (IPC)
Inversión privada X_{1t}	Inversión Bruta Fija - Privada + Variación de Inventarios
Gasto público X_{2t}	Inversión Bruta Fija Pública + Consumo público

5.3. Código de MATLAB para la estimación por MCI

```
clear
format long

% Cambiamos el directorio
cd 'D:\';

% Importamos los datos
Datos = readtable('DatosRegresionesMCI.xlsx');

% Separamos las variables que utilizaremos en las regresiones
    de la forma
% reducida

% Recordar que nuestras formas reducidas son:
% Yt = beth0 + beth1 Rt + beth2 Pt-1 + e1t (1.4)
% Mt = beth3 + beth4 Rt + beth5 Pt-1 + e2t (1.5)
% Pt = beth6 + beth7 Rt + beth8 Pt-1 + e3t (1.6)

% Vector
I = ones(height(Datos),1);
% PBI
Y = table2array(Datos(:,2));
% Precios
P = table2array(Datos(:,6));
% Masa Monetaria
M = table2array(Datos(:,3));
% Tasa de inters
R = table2array(Datos(:,8));
%Rezago de los precios
P1 = table2array(Datos(:,7));

% Creamos la matriz con las variables exgena de la forma
    reducida
% (I,Rt,Pt-1)
Exo = [I,R,P1];

% Estimaremos el vector vbeth1 que va a contener beth0, beth1 y
    beth2 de la
% ecuacin (1.4)
vbeth1 = inv(Exo'*Exo)*Exo'*Y;

% Estimaremos el vector vbeth1 que va a contener beth3, beth4 y
    beth5 de la
% ecuacin (1.5)
vbeth2 = inv(Exo'*Exo)*Exo'*M;
```

```
% Estimaremos el vector vbeth1 que va a contener beth3, beth4 y
    beth5 de la
% ecuacin (1.6)
vbeth3 = inv(Exo'*Exo)*Exo'*P;


% Con estos parmetros de la forma reducida ya podemos estimar
    el valor de
% los parmetros de la forma estructural de las ecuaciones que se
% encuentren exactamente identificadas.

%Nuestro modelo en forma estructural es el siguiente:
% Mtd = beta0 + beta1 Yt + beta2 Rt + beta3 Pt + u1t (1.1)
% Mts = alpha0 + alpha1 Yt + alpha2 Pt-1 + u2t    (1.2)
% Pt = gamma0 + gamma1 Yt + gamma2 Pt-1 + u3t     (1.3)

% Las ecuaciones (1.2) y (1.3) se encuentran exactamente
    identificadas,
% mientras que la (1.1) est subidentificada. Podemos estimar
% los parmetros alpha_j y gamma_j

% alpha1 = beth4 / beth1
alpha1 = vbeth2(2)/vbeth1(2);

% alpha2 = beth5 - alpha1 beth2
alpha2 = vbeth2(3) - alpha1*vbeth1(3);

% alpha0 = beth3 - alpha1 beth0
alpha0 = vbeth2(1) - alpha1*vbeth1(1);

% gamma1 = beth7 / beth1
gamma1 = vbeth3(2)/vbeth1(2);

% gamma2 = beth8 - gamma1 beth2
gamma2 = vbeth3(3) - gamma1*vbeth1(3);

% gamma0 = beth6 - gamma1 beth0
gamma0 = vbeth3(1) - gamma1*vbeth1(1);


% Utilizamos el mtodo indicado en Kmenta (1971) para estimar
    los errores
% estndar de los parmetros estructurales:

% Segn Kmenta (1971), los estimadores de MCI son equivalentes
    a los
% estimadores por el mtodo de variables instrumentales, por lo
    que podemos
```

```
% utilizar los errores estndares de los ltimos

% Primero para la ecuacin de la oferta monetaria:
% Mts = alpha0 + alpha1 Yt + alpha2 Pt-1 + u2t    (1.2)

Z = [Y P1 I];
W = [R P1 I];

valpha = inv(W'*Z)*W'*M;
% En este vector estan los estimadores de MCI en el orden
    (alpha1, alpha2 y
% alpha0)

%Definimos los parmetros asociados a esta ecuacin segn el mtodo
    de
%Kmenta:
%  Tamao  de la muestra:
T = height(Datos);
% Variables endgenas incluidas en la ecuacin:
Gstar = 2;
% Variables exgenas del modelo incluidas en la ecuacin
    (Intercepto y rezago de P):
Kstar = 1;

% Estimamos la varianza del error de la ecuacin (1.2)
s_12  = (M - Z*valpha)'*(M - Z*valpha)/(T - (Gstar-1) - Kstar);

% Matriz de varianzas covarianzas de los estimadores de la
    ecuacin (1.2)
Sigma12 = s_12 * inv(W'*Z)*(W'*W)*inv(Z'*W);
% Nos interesan los elementos de la diagonal principal:
% Sigma12(1,1) -> Varianza de alpha1
% Sigma12(2,2) -> Varianza de alpha2
% Sigma12(3,3) -> Varianza de alpha0
var_a1 = Sigma12(1,1);
var_a2 = Sigma12(2,2);
var_a0 = Sigma12(3,3);
% Juntamos las 3 varianzas en un solo vector
vvaralpha = [var_a1;var_a2;var_a0];

% Ahora estimamos los parmetros de la oferta agregada:
% Pt = gamma0 + gamma1 Yt + gamma2 Pt-1 + u3t     (1.3)

vgamma = inv(W'*Z)*W'*P;
% En este vector estan los estimadores de MCI en el orden
    (gamma1, gamma2 y
% gamma0)

% Estimamos la varianza del error de la ecuacin (1.2)
```

```
s_13 = (P - Z*vgamma)'*(P - Z*vgamma)/(T - (Gstar-1) - Kstar);

% Matriz de varianzas covarianzas de los estimadores de la
    ecuacin (1.2)
Sigma13 = s_13 * inv(W'*Z)*(W'*W)*inv(Z'*W);
% Nos interesan los elementos de la diagonal principal:
% Sigma12(1,1) -> Varianza de gamma1
% Sigma12(2,2) -> Varianza de gamma2
% Sigma12(3,3) -> Varianza de gamma0
var_g1 = Sigma13(1,1);
var_g2 = Sigma13(2,2);
var_g0 = Sigma13(3,3);
% Juntamos las 3 varianzas en un solo vector
vvargamma = [var_g1;var_g2;var_g0];

%Creamos una tabla con los resultados
Resultados = zeros(6,3);
for i = 1:length(valpha)
    [Resultados(i,1),Resultados(i,2),Resultados(i,3)] =...
        stattest(valpha(i),vvaralpha(i),(T - (Gstar-1) - Kstar));
end
for i = length(valpha)+1:length(valpha)+length(vgamma)
    [Resultados(i,1),Resultados(i,2),Resultados(i,3)] =...
        stattest(vgamma(i-3),vvargamma(i-3),(T - (Gstar-1) -
            Kstar));
end

Resultados = array2table(Resultados,...
    'VariableNames',{'Parmetro','Desviacin Estndar','P-Value'},
        ...
    'RowNames',
        {'alpha1','alpha2','alpha0','gamma1','gamma2','gamma0'})

r2_om = rsquare(M,Z,valpha)
r2_oa = rsquare(P,Z,vgamma)

writetable(Resultados,"ResultadosMCI.xlsx",'WriteRowNames',true)

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

% La sintaxis de Matlab indica que las funciones deben ser
    definidas al final del codigo.

%  FUNCION 1: Prueba de Hipotesis:
%  H0: b = 0
%  H1: b != 0

%  Bajo la hipotesis nula, los parametros se distribuyen como
    una t de
```

```
%  student con T - Kstar - (Gstar - 1) grados de libertad
%  Kstar y Gstar fueron definidos anteriormente

% Definimos una funcin para evaluar el nivel de significancia
    de los
% parmetros

function [estimado,se,p] = stattest(param,var,df)
    estimado = param;
    se = sqrt(var);
    tstat = param/se;
    if tstat > 0
        p = 1 - tcdf(tstat,df);
    elseif tstat < 0
        p = tcdf(tstat,df);
    end
end

function r2 = rsquare(Endo,Exo,Param)
    SCT = sum(((Endo-mean(Endo)).^2));
    SCR = sum(((Endo-Exo*Param)).^2);
    r2 = 1 - SCR/SCT;
end
```

5.4. Código de Stata para la estimación por MCO, MC2E y MC3E

```
*Definimos la ruta
cd ""

**Redefinimos las variables del modelo en Logaritmos

replace Y = ln(Y)
replace M = ln(M)
replace I = ln(I)
replace G = ln(G)
replace P = ln(P)
replace P_1 = ln(P_1)
replace R = ln(R)

*I) Aplicacin: Modelo de Mercado de dinero: MCO

*1) M = Y + R + P

reg M Y R P
outreg2 using "estimacion1.tex", replace
```

```
*2) M = Y + P_1

reg M Y P_1
outreg2 using "estimacion1.tex", append

*3) P = Y + P_1

reg P Y P_1
outreg2 using "estimacion1.tex", append


*II) Aplicacin: Modelo de Oferta Monetaria: MC2E

**Modelo de oferta monetaria

*Renombramos
rename I X1 // Inversin privado
rename G X2 // Gastro pblico
rename Y Y1 // PBI
rename M Y2 // Oferta de dinero (M2)


** Estimacin de MC2E incorrecto

*1) Y1 = Y2 + X1 + X2

reg Y1 Y2 X1 X2
outreg2 using"estimacion2.tex", replace

*2) Y1 = Y2

reg Y2 Y1
outreg2 using "estimacion2.tex", append

*---------------------------------------------------------
** Estimacin de MC2E correcto
*---------------------------------------------------------
*Tipo I
ivregress 2sls Y2 (Y1 = X1 X2)
outreg2 using "estimacion2.tex", append

*Tipo II
*Primera etapa
reg Y1 X1 X2
outreg2 using"estimacion2.tex", replace

predict Y1_hat, xb
```

```
*Segunda etapa
*Usamos un bootstrap para ajustar los errores estndar
*en esta segunda parte del mtodo de MC2E

bs, rep (100): reg Y2 Y1_hat
outreg2 using"estimacion2.tex", append

*-----------------------------------------------------------
*III) Aplicacin: Modelo de mercado de dinero MC3E
*-----------------------------------------------------------

*Tenemos el modelo anterior Y1 Y2 X1 X2
*Agregamos una variable (precio en el periodo anterior)
*A la ecuacion de oferta monetaria Y2 Y1 P_1

*Tipo I
reg3 (Y1 = Y2 X1 X2) (Y2 Y1 P_1), inst(X1 X2 P_1)
outreg2 using "estimacion3.tex", append


*Tipo 2
global ingreso "(yIngreso: Y1 Y2 X1 X2)"
global dinero "(yDinero: Y2 Y1 P_1)"

reg3 $ingreso $dinero, endog(Y1)
```

5.5. Estimación MC3E

- Definición de matriz de proyección en Z^*

$$Z^{*'}(\sum^{-1} \otimes (X'X)^{-1})Z^*$$

$$Z'(\sum^{-1} \otimes X(X'X)^{-1}X')Z$$

$$Z'(\sum^{-1} \otimes P_x)Z$$

- Definición de matriz de proyección en y^*

$$Z^{*'}(\sum^{-1} \otimes (X'X)^{-1})y$$

$$Z'(\sum^{-1} \otimes X(X'X)^{-1}X')y$$

$$Z'(\sum^{-1} \otimes P_x)y$$

Bibliografía

Gujarati, D. y Porter, D. (2009). *Basic Econometrics*. Economics series. McGraw-Hill Irwin.

Kmenta, J. (1971). *Elements of econometrics*. Macmillan New York.

Mendoza, W. (2018). *Macroeconomía intermedia para América Latina (tercera edición*. Libros PUCP / PUCP Books. Fondo Editorial - Pontificia Universidad Católica del Perú.

Wooldridge, J. M. (2001). *Econometric Analysis of Cross Section and Panel Data*, volumen 1 de *MIT Press Books*. The MIT Press.