ME
DECON

MATERIAL DE ENSEÑANZA

Nº 1

INTRODUCCIÓN A LA TEORÍA DEL EQUILIBRIO GENERAL

Alejandro Lugon

DEPARTAMENTO DE ECONOMÍA

ET LUX IN TENEBRIS LUCET MCMXVII

PUCP

MATERIAL DE ENSEÑANZA N° 1

INTRODUCCIÓN A LA TEORÍA DEL EQUILIBRIO GENERAL

Alejandro Lugon

Octubre, 2015

DEPARTAMENTO
DE **ECONOMÍA**

ET LUX IN TENEBRIS LUCET
MCMXVII
PUCP

MATERIAL DE ENSEÑANZA 1
http://files.pucp.edu.pe/departamento/economia/ME001.pdf

Av. Universitaria 1801, Lima 32 – Perú.
Teléfono: (51-1) 626-2000 anexos 4950 - 4951
econo@pucp.edu.pe
www.pucp.edu.pe/departamento/economia/

Encargado de la Serie: José Rodríguez
Departamento de Economía – Pontificia Universidad Católica del Perú,
jrodrig@pucp.edu.pe

Alejandro Lugon

Introducción a la Teoría del Equilibrio General
Lima, Departamento de Economía, 2015
(Material de enseñanza 1)

PALABRAS CLAVE: Equilibrio general, intercambio, economías con producción, eficiencia.

Hecho el Depósito Legal en la Biblioteca Nacional del Perú Nº 2015-12785.
ISSN 2413-8606 (Impreso)
ISSN (En línea –en trámite)

Impreso en Kolores Industria Gráfica E.I.R.L.
Jr. La Chasca 119, Int. 264, Lima 36, Perú.
Tiraje: 100 ejemplares

Introducción a la Teoría del Equilibrio General[1]

Alejandro Lugon[2]

Octubre 2015

[1]Notas escritas para cursos de la Maestría en Matemáticas Aplicadas y de la Maestría de Economía de la PUCP. Una primera versión fue preparada para un cursillo dictado en el XXVII Coloquio de la SMP (2009) en la Universidad Nacional del Altiplano - Puno. Agradezco al Departamento de Economía de la PUCP el apoyo en la revisión final.

[2]Dep. de Economía, PUCP

Introducción a la Teoría del Equilibrio General

Alejandro Lugon
Dep. de Economía, PUCP

Abstract

This document presents the fundamentals of the General Equilibrium Theory in finite dimension. The purpose is to provide a manual at the postgraduate level. Precision and completeness of the definition, results and proofs are the main objective of the exposition.

Chapter 1 covers the consumer theory, from preferences to demand. Chapter 2 is about exchange economies: equilibrium's existence and uniqueness, efficiency and core. Production firm is the subject of Chapter 3, from technology to offer. Chapter 4 exposes production economies: existence and efficiency of equilibrium. Finally, Chapter 5 contains some results about efficiency using the social welfare function theory.

Key words: General Equilibrium, Pure Exchange, Production Economy, Efficiency.

JEL Code: D51

Resumen

Este documento presenta los resultados fundamentales de la Teoría del equilibrio general en dimensión finita. El objetivo es servir de notas de clase a nivel de posgrado. La exposición de cada tema intenta ser precisa y completa en las definiciones, resultados y demostraciones.

En el Capítulo 1 se cubre la teoría del consumidor, de las preferencias a la demanda. El Capítulo 2 trata sobre economías de intercambio puro, cubriéndose los puntos de existencia y unicidad del equilibrio, eficiencia y núcleo. La empresa productiva se desarrolla en el Capítulo 3, de las tecnologías a la oferta. En el Capítulo 4 se ven la economías con producción, existencia y eficiencia del equilibrio. Finalmente el Capítulo 5 presenta resultados generales sobre eficiencia por medio de la funciones de bienestar social.

Palabras Clave: Equilibrio General, Intercambio, Economías con producción, Eficiencia.

Código JEL: D51

Índice general

Notación

- Para $x, y \in \mathbb{R}^L$
  - $x \gg y$ si $\forall i \; x_i > y_i$
  - $x \geq y$ si $\forall i \; x_i \geq y_i$
  - $x \gneq y$ si $x \geq y \wedge x \neq y$
- $\mathbb{R}^L_+ = \{x \in \mathbb{R}^L | x \geq 0\}$
- $\mathbb{R}^L_{++} = \{x \in \mathbb{R}^L | x \gg 0\}$
- $\Delta = \{x \in \mathbb{R}^L_+ | \sum_{i=1}^L x_i = 1\}$
- $\Delta_+ = \{x \in \mathbb{R}^L_{++} | \sum_{i=1}^L x_i = 1\}$

Introducción

La Teoría del Equilibrio General es el esfuerzo más amplio y elegante de la teoría económica para modelar la realidad económica como la que vivimos a diario. El problema económico básico surge cuando diversos agentes tienen bienes que desean intercambiar entre ellos para lograr una mejor situación personal. Estos agentes pueden ser de dos tipos: consumidores y empresas. Las empresas compran bienes para transformarlos en otros y venderlos logrando un beneficio económico, el cual se reparte entre sus propietarios. Los consumidores poseen una canasta inicial de bienes y participación en las beneficios de las empresas, con esta riqueza compran una canasta que será la que consuman. El objetivo de las empresas será maximizar sus beneficios y el objetivo de los consumidores maximizar su satisfacción personal. Para hacer más precisas estas afirmaciones necesitamos especificar las reglas de intercambio, la forma en que los agentes juzgan las situaciones y las posibilidades de transformación de las empresas. Esto se puede hacer de varias maneras, dependiendo del contexto o problema económico particular que se quiera modelar. En este texto abordaremos primero el modelo más sencillo posible, asumiendo que tenemos un número finito de bienes (L) y consumidores (I), desarrollaremos un modelo de intercambio puro sin la presencia de empresas. En una segunda parte introduciremos el sector productivo. En ambos casos todos los intercambios se dan a través del mercado donde los bienes se compran y venden a precios $p \in \mathbb{R}^L_{++}$, uniformes y fijos desde el punto de vista de todos los consumidores y empresas.

Capítulo 1

Consumidores

El consumidor es el agente básico del modelo. Tendremos $I \in \mathbb{N}$ consumidores, cada uno identificado por un indice $i = 1, \ldots, I$. Cada consumidor i posee una dotación inicial de los bienes, representada por el vector $\omega^i \in \mathbb{R}^L_+$ de manera que ω^i_j es la cantidad que inicialmente posee el individuo i del bien j. Cada consumidor puede intentar conseguir en el mercado una canasta de consumo mejor que su dotación inicial, vendiendo y comprando a los precios de mercado. Este canasta de consumo será un vector $x^i \in \mathbb{R}^L_+$. Para juzgar si una canasta es mejor que otra dotaremos al consumidor de preferencias.

1.1. Preferencias

La relación de preferencia del consumidor i es una relación sobre $\mathbb{R}^L_+$, $\succcurlyeq^i \subset \mathbb{R}^L_+ \times \mathbb{R}^L_+$. La relación $x \succcurlyeq^i y$ la leemos x *es preferido o indiferente a* y o, de manera equivalente, x *es al menos tan bueno como* y. Por el momento no es necesario diferenciar entra agentes así que obviaremos el superíndice.

Nos interesa limitar nuestro estudio a las preferencias racionales:

Definición 1.1 (Racionalidad) *Una preferencia $\succcurlyeq$ se dice racional si es:*

- *Completa:* $\forall x, y \in \mathbb{R}^L_+$ *se tiene* $x \succcurlyeq y$ *o* $y \succcurlyeq x$.
- *Transitiva* $\forall x, y, z \in \mathbb{R}^L_+$ *si* $x \succcurlyeq y \wedge y \succcurlyeq z \Longrightarrow x \succcurlyeq z$

A partir de la relación débil $\succcurlyeq$ podemos definir la relación de preferencia estricta:

$$x \succ y \text{ si y solo si } x \succcurlyeq y \text{ y no } y \succcurlyeq x$$

y le indiferencia:

$$x \sim y \text{ si y solo si } x \succcurlyeq y \text{ e } y \succcurlyeq x$$

No es difícil demostrar la siguiente:

Proposición 1.2 *Si $\succcurlyeq$ es racional entonces*

1. *$\succ$ es irreflexiva y transitiva.*
2. *$\sim$ es reflexiva, transitiva y simétrica.*

3. $\forall x, y, z \in \mathbb{R}^L_+$ $x \succcurlyeq y \Longrightarrow y \succ z \Longrightarrow x \succ z$

Para el caso que queremos desarrollar es conveniente pedir una de las siguientes propiedades que tienen que ver con la deseabilidad de lo elegido.

Definición 1.3 (Deseabilidad) *Unas preferencias $\succcurlyeq$ sobre $\mathbb{R}^L_+$ se dicen:*

1. ***(M) Monótonas**, si $\forall x, y \in \mathbb{R}^L_+$ con $x \gg y$ se tiene $x \succ y$.*
2. ***(FtM) Fuertemente Monótonas**, si $\forall x, y \in \mathbb{R}^L_+$ con $x \gneqq y$ implica $x \succ y$.*
3. ***(LnS) Localmente no Saciadas**, si $\forall x \in \mathbb{R}^L_+$ y $\forall \epsilon > 0$, $\exists y \in V(x, \epsilon)$ tal que $y \succ x$.*

La relación entre estas propiedades es:

Proposición 1.4 *FtM $\Longrightarrow$ M $\Longrightarrow$ LnS.*

Demostración

> $\lceil$ La primera implicación es directa al observar que $x \gg y$ implica $x \gneqq y$. Para la segunda, dado $\epsilon > 0$ consideramos $y = x + \frac{\epsilon}{\sqrt{L}}(1, 1, \ldots, 1) \gg x$. Por M tenemos que $y \succ x$. Como $||x - y|| = \sqrt{\epsilon^2} \leq \epsilon$ tenemos que $y \in V(x, \epsilon)$.$\rfloor$

Otra propiedad importante tiene que ver con la continuidad de la relación:

Definición 1.5 (Continuidad) *Unas preferencias $\succcurlyeq$ sobre $\mathbb{R}^L_+$ se dicen **continuas** si para todo par de secuencias convergentes $x^n \to x$ e $y^n \to y$ tales que $x^n \succcurlyeq y^n$ para todo n se tiene que $x \succcurlyeq y$.*

Como vemos en la siguiente proposición existen muchas maneras de definir la continuidad de unas preferencias:

Proposición 1.6 *Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1. *$\succcurlyeq$ es continua.*
2. *$\succcurlyeq \subset \mathbb{R}^L_+ \times \mathbb{R}^L_+$ es cerrado.*
3. *Si $x \succ y$ entonces existen U_x y U_y vecindades de x e y respectivamente abiertas en $\mathbb{R}^L_+$ tales que $a \in U_x$ y $b \in U_y$ implica $a \succ b$.*
4. *$\forall x \in \mathbb{R}^L_+$ los conjuntos $\{y \in \mathbb{R}^L_+ | y \succcurlyeq x\}$ y $\{y \in \mathbb{R}^L_+ | x \succcurlyeq y\}$ son cerrados.*
5. *$\forall x \in \mathbb{R}^L_+$ los conjuntos $\{y \in \mathbb{R}^L_+ | y \succ x\}$ y $\{y \in \mathbb{R}^L_+ | x \succ y\}$ son abiertos.*

Demostración

$\lceil$ Es obvio que 1) y 2) son equivalentes y que 4) y 5) también. Probaremos que 5)$\Rightarrow$3)$\Rightarrow$2)$\Rightarrow$4).

5)$\Rightarrow$3): Si existe z tal que $x \succ z \succ y$, construimos los conjuntos $U_x = \{a \in \mathbb{R}^L_+ | a \succ z\}$ y $U_y = \{b \in \mathbb{R}^L_+ | z \succ b\}$. Si no existe tal z, consideramos $U_x = \{a \in \mathbb{R}^L_+ | a \succ y\}$ y $U_y = \{b \in \mathbb{R}^L_+ | x \succ b\}$. En cualquier caso por 5) ambos conjuntos son abiertos y por definición cumplen con la segunda parte de 3).

3)$\Rightarrow$2):Consideremos una secuencia $\{(x^n, y^n)\} \subset \succcurlyeq$ convergente a (x, y). Si fuera verdad que $y \succ x$ por 3) tendríamos que la existencia de las vecindades U_x y U_y y por lo tanto para n suficientemente grande $x^n \succ y^n$ lo que contradice $(x^n, y^n) \in \succcurlyeq$. Por lo tanto $x \succcurlyeq y$ es decir $(x, y) \in \succcurlyeq$, mostrando que $\succcurlyeq$ es cerrado.

2)$\Rightarrow$4): Sea una secuencia $\{y^n\} \subset \{a \in \mathbb{R}^L_+ X | a \succcurlyeq x\}$ convergente a y. La secuencia $\{(y^n, x)\}$ está en $\succcurlyeq$ y converge a (y, x). Por 2) tenemos entonces $(y, x) \in \succcurlyeq$ que significa $y \succ x$.$\rfloor$

Finalmente damos una propiedad que será de ayuda cuando veamos el problema del consumidor.

Definición 1.7 (Convexidad) *Unas preferencias $\succcurlyeq$ sobre $\mathbb{R}^L_+$ se dicen **convexas** si $\forall x \in \mathbb{R}^L_+$ el conjunto de sobrenivel $\{y \in \mathbb{R}^L_+ | y \succcurlyeq x\}$ es convexo. Si este conjunto es estrictamente convexo ($y \succcurlyeq x, z \succcurlyeq x, y \neq z \Longrightarrow \forall \alpha \in]0, 1[$: $\alpha y + (1 - \alpha) z \succ x$) las preferencias se dicen estrictamente convexas.*

1.2. Utilidad

Podemos trabajar los temas que siguen a partir de las preferencias de los consumidores, pero esto es mucho más manejable si usamos una representación funcional. Esta representación recibe el nombre de función utilidad.

Definición 1.8 (Utilidad) *Una función $u : \mathbb{R}^L_+ \longrightarrow \mathbb{R}$ es una utilidad que representa a las preferencias $\succcurlyeq$ si: $\forall\ x, y \in \mathbb{R}^L_+$:*

$$x \succcurlyeq y \Longleftrightarrow u(x) \geq u(y)$$

Una primera observación directa sobre esta definición es su ordinalidad:

Proposición 1.9 *Si $u : \mathbb{R}^L_+ \longrightarrow \mathbb{R}$ representa a $\succcurlyeq$ y $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ es estrictamente creciente en el rango de u, entonces $v = f \circ u$ también representa a $\succcurlyeq$.*

La segunda es que la racionalidad de las preferencias es una condición necesaria para ser representadas:

Proposición 1.10 *Si $u : \mathbb{R}^L_+ \longrightarrow \mathbb{R}$ representa a $\succcurlyeq$, entonces $\succcurlyeq$ es racional.*

Esto último se debe a que la relación de orden $\geq$ en $\mathbb{R}$ es completa y transitiva.

La pregunta natural es si la racionalidad es también suficiente para la representabilidad. Como vemos en el clásico ejemplo de las preferencias lexicográficas, la respuesta es negativa. Consideremos sobre $\mathbb{R}^2_+$ las preferencias definidas por

$$x \succcurlyeq y \text{ si } (x_1 > y_1) \vee (x_1 = y_1 \wedge x_2 \geq y_2)$$

Estas preferencias son racionales, transitivas, fuertemente monótonas y estrictamente convexas. Sin embargo no tienen ninguna función de utilidad que las representen. Esto se constata al observar que $x \sim y$ si y solo si $x = y$, si existiera una función de utilidad tendríamos una aplicación inyectiva de $\mathbb{R}^2_+$ a $\mathbb{R}$.

Lo que falla en la lexicográfica es la continuidad. Si tomamos las secuencias $x^n = (1/n, 0) \to (0,0)$, $y^n = (0,1)$ tenemos $x^n \succ y^n$ pero $(0,1) \succ (0,0)$.

Para preferencias continuas daremos dos teoremas de representabilidad pero solo probaremos el primero.

Teorema 1.11 *Toda preferencia $\succcurlyeq$ racional, contínua y monótona es representable por una función de utilidad $u : \mathbb{R}^L_+ \longrightarrow \mathbb{R}$ contínua.*

Demostración

⌈Sea $e = (1, 1, \ldots, 1) \in \mathbb{R}^L_+$, fijemos $x \in \mathbb{R}^L_+$ y definamos:

$$A^+ = \{\alpha \in \mathbb{R}_+ | \alpha e \succcurlyeq x\} \tag{1.1}$$

$$A^- = \{\alpha \in \mathbb{R}_+ | x \succcurlyeq \alpha e\} \tag{1.2}$$

Por la continuidad ambos conjuntos son cerrados y por la racionalidad son no vacíos y su unión es $\mathbb{R}_+$. Por lo tanto su intersección no puede ser vacía, es decir existe α tal que $\alpha e \succcurlyeq x \succcurlyeq \alpha e$ es decir $x \sim \alpha e$. Si existieran α_1 y α_2 tales que $\alpha_1 e \sim x \sim \alpha_2 e$ por la monotonicidad tendríamos que $\alpha_1 = \alpha_2$, es decir:$A^+ \cup A^+ = \{\alpha_x\}$. Con esto definimos la función $u(x) = \alpha_x$ para la cual demostraremos que representa a la preferencia y que es contínua.

Representación:

$$
\begin{aligned}
x \succcurlyeq y &\iff \alpha_x e \sim x \succcurlyeq y \sim \alpha_y e && (1.3)\\
&\iff \alpha_x e \succcurlyeq \alpha_y e && (1.4)\\
&\iff \alpha_x \geq \alpha_y && (1.5)\\
&\iff u(x) \geq u(y) && (1.6)
\end{aligned}
$$

Donde la primera y cuarta equivalencia es por definición, la segunda por transitividad y la tercera por monotonicidad.

Continuidad: Basta demostrar que la imagen inversa de cualquier intervalo abierto $]a, b[\subset \mathbb{R}$ es un abierto de $\mathbb{R}^n$. Es fácil ver que $u^{-1}(]a, b[) = \{x \in \mathbb{R}^L_+ | be \succ x \succ ae\}$, el cual es abierto dada la continuidad de las preferencias.⌋

La condición de monotonicidad no es realmente necesaria y podemos tener un teorema más general:

Teorema 1.12 *(Ver [2]) Toda preferencia $\succcurlyeq$ racional y continua sobre un subconjunto X de un espacio topológico con una base contable de abiertos es representable por una función de utilidad continua.*

1.3. Demanda

El objetivo del consumidor es escoger el mejor elemento (maximal) según sus preferencias dentro de un conjunto de oportunidades de consumo. Para nuestro objetivo este conjunto está determinado por el vector de precios $p \in \mathbb{R}^n_{++}$ y la dotación inicial $\omega \in \mathbb{R}^L_+$: $B(p,w) = \{x \in \mathbb{R}^L_+ | px \leq pw\}$ y recibe el nombre de conjunto presupuestario. Usando la función de utilidad el Problema del consumidor es:

$$\begin{array}{rc} Max & u(x) \\ s.a. & x \in B(p,\omega) \end{array} \tag{1.7}$$

o de forma explícita:

$$\begin{array}{rc} Max & u(x) \\ s.a. & px \leq p\omega \\ & x \geq 0 \end{array}$$

Proposición 1.13 *Con $p \in \mathbb{R}^L_{++}$ el conjunto $B(p,\omega)$ es convexo y compacto.*

Esta propiedad de $B(p,\omega)$ junto con la continuidad de la función utilidad nos aseguran la existencia de solución. Para mantener la simplicidad de nuestro desarrollo asumiremos que las preferencias son estrictamente convexas para que la solución sea única.

Teorema 1.14 *Si las preferencias son racionales, continuas y estrictamente convexas, el problema del consumidor* (1.7) *tiene una única solución para todo $p \in \mathbb{R}^L_{++}$.*

Demostración

> ⌈Usando el Teorema de Wieirstrass, la existencia está garantizada por la compacidad de $B(p,\omega)$ y la continuidad de u. Para la unicidad supongamos que (1.7) tiene dos soluciones: x' y x'' entonces para $\alpha \in]0,1[$ tenemos que $(1-\alpha)x' + \alpha x''$ pertenece también a $B(p,\omega)$, por ser este convexo, y como las preferencias son estríctamente convexas $(1-\alpha)x' + \alpha x'' \succ x'$, contradiciendo la optimalidad de x'.⌋

Este teorema nos permite definir la función[1] demanda:

$$\begin{array}{rcl} x : \mathbb{R}^L_{++} & \longrightarrow & \mathbb{R}^L_+ \\ p & \longmapsto & x(p) = ArgMax_{x \in B(p,\omega)} u(x) \end{array}$$

Esta función nos da la canasta deseada por un consumidor con utilidad u y dotación inicial ω si los precios de mercado son p. A partir de ella podemos encontrar lo que el consumidor quiere vender y lo que quiere comprar en el mercado, a esta función se le llama exceso de demanda:

$$z(p) = x(p) - \omega$$

Así, si $z_\ell(p) > 0$ el consumidor desea comprar dicha cantidad del bien ℓ, si $-z_\ell(p) > 0$ el consumidor desea vender dicha cantidad del bien ℓ y si $z_\ell(p) = 0$ el consumidor no desea comprar ni vender del bien ℓ.

Las propiedades de la función exceso de demanda relevantes para nuestro estudio están en el siguiente teorema:

[1]Sin unicidad tendríamos una correspondencia

Teorema 1.15 *Si las preferencias son racionales, continuas, estríctamente convexas y localmente no saciadas, para todo $p \in \mathbb{R}^L_{++}$ tenemos:*

1. *$z(p)$ es continua en p.*
2. *$\forall \alpha > 0 : z(\alpha p) = z(p)$*
3. *$pz(p) = 0$*
4. *$\exists s > 0$ tal que $\forall p \in \mathbb{R}^L_{++} : \text{mín}_{\ell=1,\dots,L} z_\ell(p) > -s$*

Demostración

$\lceil$ 1. La continuidad de z se deriva de la continuidad de la demanda y esta se puede obtener como un caso particular de un teorema general de la teoría de optimización. Daremos aquí una prueba directa. Tomemos una secuencia de precios p^n convergente en $\mathbb{R}^L_{++}$ a p, debemos mostrar que $x^n = x(p^n) \to x(p) = x$. La secuencia de precios al ser convergente es acotada y podemos definir $\overline{p}_\ell = \text{máx}_n p^n_\ell > 0$ y $\underline{p}_\ell = \text{mín}_n p^n_\ell > 0$ para cada $\ell = 1, \dots, L$, así

$$\underline{p}_\ell x^n_\ell \leq p^n_\ell x^n_\ell \leq p^n x^n \leq p^n \omega \leq \overline{p}\omega$$

de donde $0 \leq x^n_\ell \leq \frac{\overline{p}\omega}{\underline{p}_\ell}$. Por lo tanto la secuencia x^n está incluida en el compacto $\{x \in \mathbb{R}^L_+ | 0 \leq x \leq (\frac{\overline{p}\omega}{\underline{p}_1}, \frac{\overline{p}\omega}{\underline{p}_2}, \dots, \frac{\overline{p}\omega}{\underline{p}_L})\}$. Consideremos una subsucesión convergente $x^{n_k} \to x'$. Como $p^{n_k} x^{n_k} \leq p^{n_k}\omega$ tomando límites tenemos $px' \leq p\omega$, luego $u(x') \leq u(x)$. Sea $y \geq 0$ tal que $py < p\omega$ para n_k suficientemente grande también $p^{n_k} y < p^{n_k}\omega$ y por lo tanto $u(y) \leq u(x^{n_k})$, tomando límites nuevamente $u(y) \leq u(x')$. Tomemos ahora $y \geq 0$ tal que $py = p\omega$ y consideremos la secuencia $y^n = (1 - \frac{1}{n})y \to y$, para la cual $py^n = (1 - \frac{1}{n})p\omega < p\omega$ y por lo tanto $u(y^n) \leq u(x')$, en el límite $u(y) \leq u(x')$. Lo que hemos probado es que $\forall y \geq 0$ tal que $py \leq p\omega$ tenemos $u(y) \leq u(x')$ y por lo tanto $x' = x$.

2. Directo al observar $B(\alpha p, w) = \{x \in \mathbb{R}^L_+ | \alpha px \leq \alpha pw\} = \{x \in \mathbb{R}^L_+ | px \leq pw\} = B(p, w)$
3. Al ser las preferencias localmente no saciadas la solución de (1.7) no puede ser interior, luego $px(p) = p\omega$ de donde $pz(p) = p(x(p) - \omega) = 0$.
4. Por definición $x(p) \geq 0$ luego $z_\ell(p) = x_\ell(p) - \omega_\ell \geq -\omega_\ell$. Basta tomar $s > \text{máx}_\ell \omega_\ell$.$\rfloor$

1.4. Ejercicios

1. Muestra que si $\succsim$ es racional entonces:

   a) $\succ$ es irreflexiva y transitiva.

   b) $\sim$ es reflexiva, transitiva y simétrica.

   c) Si $x \succ y \succsim z$ entonces $x \succ y$.

2. Define la preferencia estricta $\succ$ y la indiferencia $\sim$ que se derivan de una preferencia lexicográfica $\succsim$ en $\mathbb{R}^n_+$.

3. Muestra que la preferencia lexicográfica es racional, fuertemente monótona y estrictamente convexa.

4. (Tomado de [4]). Sea $\succsim$ una preferencia sobre X. Decimos que $\succ$ es negativamente transitiva cuando $x \succ y$ implica que $\forall z \in X$ $(x \succ z) \vee (z \succ y)$. Demuestre que $\succsim$ es transitiva si y solo si $\succ$ es negativamente transitiva.

5. (Tomado de [4]) Sobre un conjunto X definimos una relación $\succ$, que llamaremos preferencia estricta, a partir de la cual definimos $\succcurlyeq$, que llamaremos preferencia débil:

$$x \succcurlyeq y \Longleftrightarrow y \not\succ x$$

y dos propiedades:

A La preferencia estricta $\succ$ es **asimétrica** si no existe en X ningún par x e y tal que $x \succ y$ e $y \succ x$.

NT La preferencia estricta $\succ$ es **negativamente transitiva** si siempre que $x \succ y$ cualquier $z \in X$ cumple $x \succ z$ o $z \succ y$, pudiendo ser ambas ciertas.

Probar que si la preferencia estricta $\succ$ cumple **A** y **NT** entonces la preferencia débil $\succcurlyeq$ es completa y transitiva. ¿Es la recíproca también verdad?

6. (Tomado de [1]) Para una $\succsim$ preferencia sobre X, definimos la propiedad:

$$\boxed{\mathbf{P}\text{: } \forall x, y, u, v \text{ si } x \succsim u \text{ y } y \succsim v \text{ entonces } \alpha x + (1-\alpha)y \succsim \alpha u + (1-\alpha)v \ \forall \alpha \in [0,1]}$$

Estudiar si **P** implica la convexidad de $\succsim$ y/o si la convexidad de $\succsim$ implica **P**.

7. Muestre que si una preferencia $\succsim$ sobre X es Localmente No Saciada toda curva de indiferencia $C_z = \{x \in X | x \sim z\}$ para $z \in X$ no tiene puntos interiores.

8. Sea $\succcurlyeq$ una preferencia racional sobre $\mathbb{R}^L_+$ y $\succ$ su preferencia estricta. Definimos las propiedades:

M : $\forall x, y \in \mathbb{R}^L_+$ con $x \gg y$ se tiene $x \succ y$.

FtM : $\forall x, y \in \mathbb{R}^L_+$ con $x \gneqq y$ implica $x \succ y$.

LnS : $\forall x \in \mathbb{R}^L_+$ y $\forall \epsilon > 0$, $\exists y \in V(x, \epsilon)$ tal que $y \succ x$.

DD : $\exists v \in \mathbb{R}^L_+$ tal que $\forall x \in \mathbb{R}^L_+$, $\forall \alpha > 0$: $x + \alpha v \succ x$

Se sabe que FtM $\Longrightarrow$ M $\Longrightarrow$ LnS. Ubica DD en esta secuencia

9. Prueba que toda preferencia representable por una funcíon continua es continua.

10. Encuentra un ejemplo de una preferencia no continua sobre $\mathbb{R}^n_+$ que sea representable por una función de utilidad.

11. Sea $\succsim$ una preferencia sobre $X \in \mathbb{R}^n$ y $u : X \to \mathbb{R}$ una utilidad que la representa. Demuestra que si $\succsim$ es convexa entonces $\forall x, y \in X, \forall \alpha \in [0,1]$ se cumple que $u(\alpha x + (1-\alpha)y \geq \text{mín}\{u(x), u(y)\}$ (u es cuasicóncava).

12. (Tomado de [1])Decimos que una función $u : \mathbb{R}^L_+ \to \mathbb{R}$ es estrictamente quasi-cóncava (EQC) si para todo par de canastas $x, y \in \mathbb{R}^L_+$, $x \neq y$ y $0 < \alpha < 1$ se cumple:

$$u\left(\alpha x + (1-\alpha)y\right) > \text{mín}\{u(x), u(y)\}$$

Dadas una preferencia $\succcurlyeq$ y una utilidad u que la representa, pruebe que u es EQC si y solo si $\succcurlyeq$ es estrictamente convexa.

13. Muestra que si X es finito y $\succeq$ es una preferencia racional sobre X entonces existe una funcíon de utilidad que representa a $\succeq$.

14. (Tomado de [1]) Una preferencia $\succeq$ sobre $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^{L-1}_+$ es cuasilineal respecto del primer bien si:

    a) $x \sim y \Rightarrow (x + (\alpha, 0, \ldots, 0)) \sim (y + (\alpha, 0, \ldots, 0))$ para todo α
    b) $(x + (\alpha, 0, \ldots, 0)) \succ x$ para todo x y $\alpha > 0$

    Muestra que $\succeq$ sobre $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^{L-1}_+$ es cuasilineal respecto del primer bien si y solo si es representable por una funcíon de utilidad $u(x)$ de la forma:

$$u(x) = x_1 + v(x_2, \ldots, x_L)$$

15. Sea la preferencia lexicográfica sobre el conjunto $X = \{0,1\}^n$. Muestra que es representable y encuentra una funcíon de utilidad que lo haga.

16. Una preferencia $\succeq$ sobre R^n_+ es homotética si cumple con: $x \sim y \Rightarrow \alpha x \sim \alpha y$ para todos $x, y \in X$ y $\alpha \geq 0$. Muestra que $\succeq$ sobre R^n_+ es homotética si y solo si es representable por una funcíon de utilidad $u(x)$ homogénea de grado uno.

17. Sea la función de utilidad $u : R^n_+ \to R$ homogénea de grado 1. Muestra que para todo $\lambda > 0$: $x \sim y \Rightarrow \lambda x \sim \lambda y$.

18. Encuentra la demanda (funcíon o correspondencia) para cada una de las siguientes utilidades:

    a) $U(x_1, x_2) = ax_1 + bx_2$
    b) $U(x_1, x_2) = 2x_1 + 3x_2$
    c) $U(x_1, x_2) = \text{mín}\{ax_1, bx_2\}$
    d) $U(x_1, x_2) = \text{mín}\{x_1, 3x_2\}$
    e) $U(x_1, x_2) = x_1^a x_2^b$
    f) $U(x_1, x_2) = x_1^2 x_2^4$
    g) $U(x_1, x_2) = (x_1^\rho + x_2^\rho)^{\frac{1}{\rho}}$
    h) $U(x_1, x_2) = (x_1^{0,5} + x_2^{0,5})^2$

i) $U(x_1, x_2) = x_1 + \sqrt{x_2}$

j) $U(x_1, x_2) = x_1 + \ln x_2$

k) $U(x_1, x_2) = x_1 + \ln(1 + x_2)$

l) $U(x_1, x_2) = -(x_1 - a)^2 - (x_2 - b)^2$

m) $U(x_1, x_2) = -(x_1 - 9)^2 - (x_2 - 1)^2$

19. Demuestre que si las preferencias de un consumidor son estríctamente convexas su demanda $x(p, \omega)$ es una función. Esto es: existe una única canasta que resuelve el problema de maximización.

20. Sea la función $x(p)$ la demanda Walrasiana de un consumidor con dotación inicial ω fija. Muestra que esta funcíon cumple el Axioma Débil de la Preferencia Revelada (ADPR):

    $\forall p, p' \in R^L_{++}$:
$$p \cdot x(p') \leq p \cdot \omega \wedge x(p') \neq x(p) \Rightarrow p' \cdot x(p) > p' \cdot \omega$$

21. (Tomado de [1]) Considere la utilidad sobre $\mathbb{R}^3_+$:
$$u(x_1, x_2, x_3) = \sqrt{x_1} + \sqrt{x_2} + x_2 + \frac{x_3}{1 + x_3}$$

    perteneciente a un consumidor con dotación inicial $\omega = (1, 1, 1)$.

    a) Muestre que u es estrictamente cóncava, fuertemente monótona y continua.

    b) Muestre que para $x_3 > 0$:
$$(x_1, x_2 + x_3, 0) \succ (x_1, x_2, x_3)$$

    c) Muestre que si $p_2 = p_3$ entonces $x_3(p) = 0$

    d) Considere la secuencia de precios $p^n = (1, 1/n, 1/n)$.

    e) Estudie y comente los límites de $x_2(p^n)$ y $x_3(p^n)$.

22. (Tomado de [6]) En el problema:
$$\begin{array}{ll} \text{Min} & p \cdot x \\ \text{s.a.} & u(x) \geq u \\ & x \geq 0 \end{array}$$

    Definimos la función $e(p, u)$ como el valor óptimo y la correspondencia $h(p, u)$ como el conjunto de canastas donde se encuentra $e(p, u)$. Demuestra que:

    a) $e(p, u)$ es homogénea de grado uno y cóncava en p.

    b) Si $u(\cdot)$ representa a una preferencia localmente no saciada: $x \in h(p, u) \implies u(x) = u$.

    c) Si $u(\cdot)$ representa a una preferencia convexa $h(p, u)$ es de imagen convexa.

d) Si la convexidad de las preferencias es estricta $h(p, u)$ es función.

23. Sea un consumidor con unas preferencias racionales, localmente no saciadas y homotéticas. Muestra que su demanda cumple:

$$\forall \alpha > 0 : x(\alpha p, w) = \frac{1}{\alpha} x(p, w)$$

24. (Tomado de [1])Sea $X : \mathbb{R}^L_{++} \to \mathbb{R}^L_+$ la demanda de un consumidor con preferencias racionales, continuas, fuertemente monótonas y estrictamente convexas. Tomemos una secuencia $\{p^n\}$ en $\mathbb{R}^L_{++}$ convergente a $p \in \mathbb{R}^L_+$. Pruebe que si $p_1 > 0$ entonces la secuencia (de las cantidades demandadas del bien 1) $\{X_1(p^n)\}$ en $\mathbb{R}_+$ es acotada.

25. (Tomado de [5])Demuestre que si las preferencias de un consumidor son estríctamente convexas su demanda $x(p, \omega)$ es una función. Esto es: existe una única canasta que resuelve el problema de maximización.

Capítulo 2

Equilibrio Walrasiano para Economías de Intercambio Puro

Consideremos una economía de L bienes e I consumidores. Cada consumidor i está definido por su dotación inicial ω^i y su preferencia $\succcurlyeq^i$, así la economía es la colección:

$$\mathcal{E} = \{(\omega^i, \succcurlyeq^i) | i = 1, \dots I\}$$

Asumiremos que $\overline{\omega} = \sum_{i=1}^{I} \omega^i \gg 0$, es decir que en el agregado la economía en su conjunto dispone de cantidades positivas de todos los bienes considerados.

2.1. Exceso de Demanda Agregada

Dada una economía, las transacciones entre los agentes están determinadas por el vector de precios. Dado $p \in \mathbb{R}^L_{++}$ cada consumidor i decide su consumo óptimo y su acción en el mercado está dada por su Exceso de Demanda $z^i(p)$, la suma de todos ellos nos dará la Función Exceso de Demanda Agregada, $Z : \mathbb{R}^L_{++} \longrightarrow \mathbb{R}^L$ definida como:

$$Z(p) = \sum_{i=1}^{I} z^i(p)$$

La FEDA hereda las propiedades la FED individual:

Teorema 2.1 *Si las preferencias son racionales, continuas, estrictamente convexas y fuertemente monótonas, para todo $p \in \mathbb{R}^L_{++}$ tenemos:*

1. *$Z(p)$ es continua.*
2. *$\forall \alpha > 0 : Z(\alpha p) = Z(p)$*
3. *$pZ(p) = 0$*
4. *$\exists s > 0$ tal que $\forall p \in \mathbb{R}^L_{++} : \text{mín}_{\ell=1,\dots,L} Z_\ell(p) > -s$*
5. *Si $p^n \to p \neq 0$ con $p_{\ell'} = 0$ para cierto ℓ': $\text{máx}_\ell Z_\ell(p^n) \to +\infty$*

Demostración

⌈ Los puntos 1 al 4 son directos a o partir del Teorema 1.15. Veamos el punto 5. Sea $p^n \to p \neq 0$ si perder generalidad supongamos $p_1 = 0$ y $p_2 > 0$. Como $\sum_{i=1}^{I} \omega^i \gg 0$ tenemos que $p \sum_{i=1}^{I} \omega^i = \sum_{i=1}^{I} p\omega^i \gg 0$ y por lo tanto al menos para algún i $p\omega^i \gg 0$. Demostraremos que para este consumidor:

$$\lim_{n\to\infty} \max_{\ell} x_{\ell}^i(p^n) = +\infty$$

supongamos que no, que la secuencia $\max_{\ell} x_{\ell}^i(p^n)$ es acotada, por lo tanto podemos tener subsecuencia convergente, $x^{n_k} = x^i(p^{n_k}) \to \overline{x}$.

Como $p^{n_k} x^i(p^{n_k}) \leq p^{n_k}\omega^i$, en el límite $p\overline{x} \leq p\omega^i$. Sea $y \geq 0$ tal que $py < p\omega^i$ para n_k suficientemente grande también $p^{n_k} y < p^{n_k}\omega^i$ y por lo tanto $u(y) \leq u(x^{n_k})$, tomando límites nuevamente $u(y) \leq u(\overline{x})$. Tomemos ahora $y \geq 0$ tal que $py = p\omega^i$ y consideremos la secuencia $y^n = (1 - \frac{1}{n})y \to y$, para la cual $py^n = (1 - \frac{1}{n})p\omega^i < p\omega^i$ y por lo tanto $u(y^n) \leq u(\overline{x})$, en el límite $u(y) \leq u(\overline{x})$. Lo que hemos probado es que $\forall y \geq 0$ tal que $py \leq p\omega^i$ tenemos $u(y) \leq u(\overline{x})$. Pero para la canasta $y = \overline{x} + (1, 0, \ldots, 0)$ cumple $py = p\overline{x} = p\omega^i$ y por la monotonicidad fuerte $u(y) > u(\overline{x})$.⌋

2.2. Equilibrio

Diremos que un precio p es de equilibrio si los excesos de demandas agregados son nulos, de esta forma si algún agente quiere comprar siempre encontrará un vendedor y viceversa. Formalmente tenemos:

Definición 2.2 (Equilibrio) *Para una economía $\mathcal{E}$ con función exceso de demanda agregada $Z : \mathbb{R}_{++}^L \longrightarrow \mathbb{R}^L$ diremos que p^* es un precio de equilibrio si $Z(p^*) = 0$.*

En lo que resta de este capítulo nos ocuparemos de probar la existencia de equilibrio.

Teorema 2.3 *Si la función exceso de demanda agregada $Z : \mathbb{R}_{++}^L \longrightarrow \mathbb{R}^L$ cumple las cinco propiedades del Teorema 2.1 entonces existe un vector de precios de equilibrio p^*.*

La demostración la haremos a través de una serie de lemas y usaremos:

Teorema 2.4 (Punto Fijo de Kakutani) *Si una correspondencia[1] $\phi : A \rightrightarrows A$, con A no vacío, compacto y convexo, es Semi Continua Superiormente y de imagen convexa no vacía entonces tiene un punto fijo $x^* \in A$ en el sentido que $x^* \in \phi(x^*)$.*

La estrategia de la prueba es definir a partir de Z una correspondencia que cumpla las condiciones del teorema de Kakutani para obtener un punto fijo y luego probar que dicho punto fijo es el equilibrio buscado.

Empecemos por notar que la homegeneidad de Z nos permite normalizar los precios y considerar solo a aquellos que pertenecen al simplex positivo de $\mathbb{R}^L$: $\Delta_+ = \{p \in \mathbb{R}_{++}^L | \sum_{\ell=1}^{L} p_\ell = 1\}$.

[1]Ver Anexo

Definamos la correspondencia $f : \Delta \rightrightarrows \Delta$ como:

$$f(p) = \begin{cases} \{q \in \Delta | Z(p)q \geq Z(p)q',\ \forall q' \in \Delta\} & \text{si} \quad p \in \Delta_+ \\ \\ \{q \in \Delta | pq = 0\} & \text{si} \quad p \in \Delta \setminus \Delta_+ \end{cases}$$

también podemos escribir:

$$f(p) = \begin{cases} \{q \in \Delta | q_\ell = 0 \text{ si } Z_\ell(p) < \text{máx}_i\, Z_i(p)\} & \text{si} \quad p \in \Delta_+ \\ \\ \{q \in \Delta | q_\ell = 0 \text{ si } p_\ell > 0\} & \text{si} \quad p \in \Delta \setminus \Delta_+ \end{cases}$$

Como Δ es no vacío, compacto y convexo, para poder aplicar el Teorema de Kakutani sólo falta probar:

Lema 2.5 *La correspondencia f es SCS y de imagen convexa*

Demostración

$\lceil$ La convexidad es directa, veamos la semi continuidad superior. Sean las secuencias $p^n \to p$, $q^n \to q$ con $q^n \in f(p^n)$ debemos probar que $q \in f(p)$. Si $p \in \Delta_+$ entonces $p \gg 0$ y para n suficientemente grande $p^n \gg 0$ y $Z(p^n)q^n \geq Z(p^n)q'$, $\forall q' \in \Delta$, tomando limites y usando la continuidad de Z: $Z(p)q \geq Z(p)q'$, $\forall q' \in \Delta$ y por lo tanto $q \in f(p)$. Si $p \in \Delta \setminus \Delta_+$ y $p_\ell > 0$ entonces existe $\epsilon > 0$ tal que para n suficientemente grande $p^n_\ell > \epsilon$. Si $p^n \in \Delta \setminus \Delta_+$ entonces $q^n_\ell = 0$. Si $p^n \in \Delta_+$ entonces

$$\begin{aligned} Z_\ell(p^n) &\leq \frac{1}{\epsilon} p^n_\ell Z_\ell(p^n) \\ &= -\frac{1}{\epsilon} \sum_{j \neq \ell} p^n_j Z_j(p^n) \\ &\leq \frac{s}{\epsilon} \sum_{j \neq \ell} p^n_j \\ &< \frac{s}{\epsilon} \end{aligned}$$

Luego $Z_\ell(p^n)$ es acotado pero como $p \in \Delta \setminus \Delta_+$ tenemos que $\text{máx}_j\, Z_j(p^n) \to +\infty$ luego, para n suficientemente grande $\text{máx}_j\, Z_j(p^n) > Z_\ell(p^n)$ y por lo tanto $q^n_\ell = 0$. Resumiendo tenemos que si $p_\ell > 0$ entonces para n suficientemente grande $q^n_\ell = 0$ y su límite $q_\ell = 0$ también, lo que prueba que $q \in f(p)$ $\rfloor$

El lema anterior y el Teorema de Kakutani nos permite afirmar la existencia de un punto fijo para la correspondencia f, el lema siguiente nos dice que dicho punto fijo es el equilibrio buscado.

Lema 2.6 *Si p^* es un punto fijo de f entonces $p^* \in \mathbb{R}^L_{++}$ y $Z(p^*) = 0$.*

Demostración

$\lceil$ Si $p^* \in f(p^*)$ y $p^* \in \Delta \setminus \Delta_+$ entonces $p^*p^* = 0$ lo cual es imposible. Por otro lado si $Z(p^*) \neq 0$ como $p^* \in \Delta_+$ tendríamos $f(p^*) \subset \Delta \setminus \Delta_+$ lo cual también es imposible.$\rfloor$

Una vez establecida la existencia se pueden estudiar diversas características del equilibrio como eficiencia, unicidad, estabilidad, robustez etc. En la siguiente sección veremos el tema de unicidad y dejaremos para un capítulo aparte el estudio de la eficiencia.

2.3. Unicidad

Si nuestro modelo intenta describir con el concepto de equilibrio el resultado de la interacción de los agentes, luego de mostrar que el equilibrio existe un buen resultado teórico sería poder asegurar su unicidad. Lamentablemente esto no es posible, veremos un ejemplo en el cual tendremos más de un equilibrio.

Ejemplo 2.7 *(Tomado de [5]) El consumidor* 1 *tiene utilidad* $u_1(x_1, x_2) = x_1 - 1/8x_2^{-8}$ *y dotación inicial* $(2, r)$*, el consumidor* 2 *tiene utilidad* $u_2(x_1, x_2) = x_2 - 1/8x_1^{-8}$ *y dotación inicial* $(r, 2)$*. Estas utilidades representan preferencias completas, continuas, convexas y estrictamente monótonas. Para esta economía, normalizando los precios con* $p_2 = 1$*, el exceso de demanda para el primer bien es:*

$$Z_1(p_1, 1) = r(p_1)^{-1} - (p_1)^{-8/9} + (p_1)^{-1/9} - r$$

Es fácil ver que $Z_1(1, 1) = 0$ *luego los precios* $(1, 1)$ *son de equilibrio. Según el valor de r podemos tener un par de equilibrios más, por ejemplo si* $r = 2^{8/9} - 2^{1/9} \approx 0{,}7717$ *tenemos que* $Z_1(2, 1) = 0$ *y* $Z_1(0{,}5, 1) = 0$*.*

En general se puede probar (Sonnenschein-Mantel-Debreu) que dada una función que cumpla las cinco propiedades del Teorema 2.1 existe una economía $\mathcal{E} = \{(\omega^i, \succcurlyeq^i) | i = 1, \ldots I\}$ que genera dicha función como su Exceso de Demanda Agregada. Luego si queremos tener unicidad, debemos restringir nuestra economía a un subconjunto menor que el estudiado.

Lo que si se puede lograr sin mucho esfuerzo es probar que genéricamente toda economía tiene un número finito (e impar) de equilibrios aislados. Estas resultados son los que veremos a continuación.

Empecemos estableciendo un resultado para la unicidad local. Para esto normalicemos $p_L = 1$ y definamos $\hat{Z}(p) = (Z_1(p), Z_2(p), \ldots, Z_{L-1}(p))$, asumiremos que esta función tiene derivadas parciales continuas formando la matriz $\hat{D}(p) = D_{(p_1,\ldots,p_{L-1})}\hat{Z}(p)$

Definición 2.8 (Regularidad) *Un equilibrio* p^* *es regular si la matriz* $\hat{D}(p^*)$ *es regular, es decir tiene determinante no nulo (equivalentemente tiene inversa o es de rango completo). Una economía es regular si todos sus equilibrios sin regulares.*

Es posible demostrar que especificando adecuadamente el espacio de todas las economías, el conjunto de economías regulares es abierto y denso. En términos técnicos, la propiedad de ser regular es genérica. En términos menos técnicos, las economías no regulares son muy raras y si se perturban se convierten en regulares.

Proposición 2.9 *Bajo la normalización* $p_L = 1$ *todo equilibrio regular es localmente único, es decir aislado.*

Demostración

> ⌈ La demostración recae en el Teorema de la Función Implícita. Si p^* es un equilibrio tenemos que $(p^*, 0)$ es solución de $F(p, q) = \hat{Z}(p) - q = 0$, un sistema de $L - 1$ ecuaciones para las $2L - 2$ variables $(p_1, \ldots, p_{L-1}, q_1, \ldots, q_{L-1})$. Este sistema define localmente en $(p^*, 0)$ a $(p_1, \ldots, p_{L-1})$ como función $(q_1, \ldots, q_{L-1})$ si el Jacobiano $D_pF(p, q)|_{(p^*,0)} \neq 0$. Como $D_pF(p, q)|_{(p^*,0)} = \hat{D}(p^*) \neq 0$ al ser p^* regular, tenemos que localmente $F(p, 0) = \hat{Z}(p) = 0$ tiene como única solución a p^*. ⌋

Proposición 2.10 *En una economía regular con la normalización $p_L = 1$ el número de equilibrios es finito.*

Demostración

⌈ Consideremos el conjunto de equilibrios normalizados:

$$E = \{p = (p_1, \ldots, p_{L-1}, 1) | Z(p) = 0\}$$

Si tuviéramos en E una secuencia de precios que tienda a un vector con alguna componente nula, la propiedad del comportamiento en la frontera de Z nos daría que algún exceso de demanda tendería a infinito,lo cual es imposible si los precios son de equilibrio. Luego todos los precios de equilibrio tiene una cota inferior. De la misma manera no podemos tener precios arbitrariamente grandes por esto equivale a que el precio del bien L tienda a cero. Luego el conjunto E es acotado. Por otro lado como el exceso de demanda es continuo E es cerrado. En la proposición anterior vimos que E es discreto.

Al ser E un conjunto compacto (cerrado y acotado) y discreto de un espacio euclideano, debe ser finito. ⌋

Podemos dar un pequeño paso más y afirmar que el número de equilibrios de una economía regular debe ser impar.

Como ya dijimos al comienzo de esta sección si queremos conseguir unicidad global debemos restringir nuestra economía. Una manera clásica de hacerlo es asumir que el exceso de demanda agregada cumple el Axioma Débil de las Preferencias Reveladas, una propiedad que cumple cada exceso de demanda individual (de cada agente) pero que no se conserva al agregarlos.

Definición 2.11 (ADPR) *Dada una FEDA Z decimos que cumple el Axioma Débil de las Preferencias Reveladas (ADPR) si para todo par de precios p y p' tales que $Z(p) \neq Z(p')$, si $pZ(p') \leq 0$ entonces $p'Z(p) > 0$.*

El ADPR nos garantizará la unicidad del equilibrio.

Proposición 2.12 *Si Z cumple ADPR el conjunto E de precios de equilibrio es convexo.*

Demostración

⌈ Tomemos dos precios de equilibrio p y p' con $Z(p) = 0 = Z(p')$ y una combinación convexa de estos $p_\alpha = \alpha p + (1-\alpha)p'$ que no sea un precio de equilibrio: $Z(p_\alpha) \neq 0$. Por la Ley de Walras:

$$p_\alpha Z(p_\alpha) = \alpha p Z(p_\alpha) + (1-\alpha)p' Z(p_\alpha) = 0$$

Ambos términos de la suma no pueden ser positivos, al menos uno de los dos debe ser no negativo. Sin perder generalidad supongamos que $pZ(p_\alpha) \leq 0$, por el ADPR debemos tener que $p_\alpha Z(p) > 0$ lo cual contradice $Z(p) = 0$. ⌋

Es fácil ahora ver que una economía regular cuya FEDA cumple ADPR debe tener un único equilibrio.

Teorema 2.13 *Una economía regular con una FEDA Z que cumple el ADPR tiene un único equilibrio.*

2.4. Eficiencia

En la sección anterior hemos estudiado el equilibrio de mercado, donde los intercambios se dan de acuerdo a ciertos precios, ahí nos centramos en la existencia de unos precios $p \in \mathbb{R}^L_{++}$ que equilibrarán el mercado. Este vector de precios genera para cada consumidor $i = 1, \dots, I$ una canasta de consumo $x^i(p)$. En ese sentido el vector $(x^1(p), \dots, x^I(p)) \in \mathbb{R}^{L\times I}_+$ es una reasignación de las dotaciones iniciales por medio del intercambio en el mercado de acuerdo a los precios dados.

La pregunta que nos hacemos en esta sección es sobre la bondad de esta reasignación en el sentido de eficiencia. El intercambio entre dos agentes se da cuando es favorable para ambos, al adoptar el mercado como mecanismo estamos limitando las posibilidades de intercambio. Sin limitaciones en los intercambios se puede lograr cualquier asignación factible.

Definición 2.14 (Asignación factible) *Dada una economía* $\mathcal{E} = \{(\omega^i, \succcurlyeq^i) | i = 1, \dots I\}$ *una asignación factible es un vector* $(x^1, \dots, x^I) \in \mathbb{R}^{L\times I}_+$ *tal que* $\sum_{i=1}^I x^i = \overline{\omega} = \sum_{i=1}^I \omega^i$

Podemos redefinir el concepto de equilibrio dando énfasis a la asignación de los recursos y no a los precios.

Definición 2.15 (Asignación de Equilibrio) *Una asignación* $(x^1, \dots, x^I)$ *factible es de equilibrio si existe* $p \in \mathbb{R}^L_{++}$ *tal que para todo* $i = 1, \dots, I$, $px^i \leq p\omega^i$ *y si* $u^i(x) > u^i(x^i)$ *entonces* $px > p\omega^i$

La pregunta que surge es si, a partir de una asignación de equilibrio, todavía se pueden lograr intercambios beneficiosos para ambas partes involucradas (obviamente fuera del mercado). Este concepto de eficiencia es capturado por el de Óptimo de Pareto.

Definición 2.16 (Óptimo de Pareto Fuerte) *Una asignación factible* $(x^1, x^2, \dots, x^I)$ *es un Óptimo de Pareto Fuerte si* $\nexists\, (\overline{x}^1, \dots, \overline{x}^I)$ *factible tal que:*

1. $\forall i = 1, \dots, I \;\; u^i(\overline{x}^i) \geq u^i(x^i)$
2. $\exists j$ *tal que* $u^j(\overline{x}^j) > u^j(x^j)$

Definición 2.17 (Óptimo de Pareto Débil) *Una asignación factible* $(x^1, x^2, \dots, x^I)$ *es un Óptimo de Pareto Débil si* $\nexists\, (\overline{x}^1, \overline{x}^2, \dots, \overline{x}^I)$ *factible tal que:*

$$\forall i = 1, \dots, I u^i(\overline{x}^i) > u^i(x^i)$$

Proposición 2.18
1. *Todo Óptimo de Pareto Fuerte es un Óptimo de Pareto Débil.*
2. *Si las preferencias de los consumidores son continuas y fuertemente monótonas, todo Óptimo de Pareto Débil es un Óptimo de Pareto Fuerte.*

Demostración

$\ulcorner$ 1. Directo

2. Mostraremos que, bajo los supuestos, si una asignación no es Pareto Fuerte entonces no es Pareto Débil.

   Sea $(x^1, x^2, \ldots, x^I)$ una asignación que no es Pareto Fuerte, entonces existe una asignación factible $(\overline{x}^1, \overline{x}^2, \ldots, \overline{x}^I)$ tal que:

   a) $\forall i = 1, \ldots, I \ u^i(\overline{x}^i) \geq u^i(x^i)$

   b) $\exists j$ tal que $u^j(\overline{x}^j) > u^j(x^j)$

   Por la continuidad de las preferencias para α suficientemente pequeño: $u^j((1-\alpha)\overline{x}^j) > u^j(x^j)$ y por la monotonicidad fuerte: $\forall i = 1, \ldots, I, \ i \neq j$ $u^i(\overline{x}^i + \frac{\alpha}{I-1}\overline{x}^j) > u^i(\overline{x}^i) \geq u^i(x^i)$. Luego hemos conseguido una asignación factible en la cual todos los consumidores están mejor, luego $(x^1, x^2, \ldots, x^I)$ no es Pareto Débil.⌋

En general un Óptimo de Pareto es una asignación de los recursos de una economía tal que a partir de ella nadie puede mejorar sin que alguien empeore. Hay que notar que este concepto no nos permite decir si una asignación es mejor que otra en general. Tampoco hay ninguna noción de equidad o justicia implícita, por ejemplo una asignación $(\overline{\omega}, 0, \ldots, 0)$ es un un óptimo de Pareto, si el consumidor 1 tiene preferencias monótonas.

En la siguiente sección veremos la respuesta a la pregunta inicial de este capítulo.

Primer y Segundo Teorema del Bienestar

Bajo suposiciones suaves toda asignación de equilibrio es un óptimo de Pareto.

Teorema 2.19 (Primer Teorema del Bienestar) *Si las preferencias de los consumidores son Localmente No Saciadas, todo Asignación de Equilibrio es un Óptimo de Pareto Fuerte*

Demostración

⌈ Sea $(x^1, x^2, \ldots, x^I)$ una asignación de equilibrio con precios de equilibrio p. Sea una asignación $(y^1, y^2, \ldots, y^I)$ con $u(y^i) \geq u(x^i)$ para todo i y (spg) $u(y^1) > u(x^1)$. Como x^1 es la demanda de 1 a precios p debemos tener que

$$py^1 > px^1$$

Para los demás consumidores si fuera verdad que $py^i < px^i$ por la No Saciedad Local existirá un z^i tal que $pz^i < px^i$ y $u(z^i) > u(y^i) \geq u(x^i)$ Lo cual contradice el hecho que x^i es la demanda de i a precios p. Luego debemos tener que

$$py^i \geq px^i$$

Sumando tenemos que $p\sum_{i=1}^{I} y^i = \sum_{i=1}^{I} py^i = py^1 + \sum_{i=2}^{I} py^i > px^1 + \sum_{i=2}^{I} px^i = p\overline{\omega}$ y no podríamos tener $\sum_{i=1}^{I} y^i = \overline{\omega}$, con lo cual la asignación $(y^1, y^2, \ldots, y^I)$ no es factible. ⌋

Se puede tener el mismo resultado cambiando la hipótesis de No Saciedad Local por la de Convexidad Estricta.

El Segundo Teorema del Bienestar nos dice que todo Óptimo de Pareto es "algo parecido" a un equilibrio de mercado si se redistribuyen las dotaciones iniciales. Para establecer este resultado usaremos:

Definición 2.20 (Soporte) *Una asignación $(x^1, \ldots, x^I)$ factible es soportada por $p \in \mathbb{R}^L_+$, $p \neq 0$ si para todo $i = 1, \ldots, I$ si $u^i(x) \geq u^i(x^i)$ entonces $px \geq px^i$*

En relación a la definición de Asignación de Equilibrio hay que notar primero que no se exige que todos los precios sean positivos, p puede tener algunos precios, pero no todos, nulos. También vemos que es posible tener x con $u^i(x) > u^i(x^i)$ y $px \leq px^i$, es decir no se pide que x^i sea optimal. Estas diferencias no son tan inocentes como parecen, aún así la diferencia más importante es que no se pide que $px^i \leq p\omega^i$. Es decir que un consumidor puede recibir una canasta cuyo valor a precios p sea mayor que el de su dotación inicial. Esto indica que de la asignación de dotaciones iniciales a la asiganción soportada por p ha habido una redistribución de la riqueza.

El siguiente resultado nos da una primera relación precisa entre los dos conceptos:

Proposición 2.21 *Si las preferencias son localmente no saciadas toda asignación de equilibrio es soportada por el precio de equilibrio.*

Demostración

> ⌈ Sea $(x^1, \ldots, x^I)$ la asignación de equilibrio y p el precio de equilibrio. Como las preferencias son LNS, $px^i = p\omega^i$ para todo $i = 1, \ldots, I$. Entonces debemos mostrar solamente que $u^i(x) = u^i(x^i)$ implica $px \geq p\omega^i$. Supongamos que no, que $px < p\omega^i$, por LNS existe $\bar{x}$ tal que $p\bar{x} < p\omega^i$ y $u^i(\bar{x}) > u^i(x) = u^i(x^i)$, lo cual contradice la optimalidad de x^i. ⌋

Queda la pregunta de cuándo una asignación $(x^1, \ldots, x^I)$ soportada por p puede ser considerada una asignación de equilibrio. Por el efecto de la redistribución de la riqueza sabemos que esto no es en general posible a partir de las dotaciones iniciales, debemos redistribuirlas. El caso más sencillo es pensar que las redistribuimos directamente a $(x^1, \ldots, x^I)$.

Proposición 2.22 *Si las preferencias son continuas y fuertemente monótonas. Para una asignación $(x^1, \ldots, x^I)$ soportada por $p \in \mathbb{R}^L_+$, $p \neq 0$ con $px^i > 0$ para todo $i = 1, \ldots, I$ se cumple que $p \gg 0$ y para todo $i = 1, \ldots, I$ si $u^i(x) > u^i(x^i)$ entonces $px > px^i$*

Demostración

> ⌈ Supongamos $\bar{x}$ tal que $u^i(\bar{x}) > u^i(x^i)$ entonces $p\bar{x} = px^i > 0$ y tomemos $\lambda\bar{x}$ con $0 < \lambda < 1$. Por continuidad, para λ suficientemente cerca de 1: $u^i(\lambda\bar{x}) > u^i(x^i)$ y $p(\lambda\bar{x}) = \lambda(p\bar{x}) < p\bar{x} = px^i > 0$. Lo cual contradice la suportabilidad de $(x^1, \ldots, x^I)$ por p. Ahora por la monotonicidad fuerte, para todo $\ell = 1, \ldots, L$, $u^i(x^i + e_\ell) > u^i(x^i)$, luego $p(x^i + e_\ell) > px^i$ de donde $p_\ell > 0$.⌋

Podemos ahora formular:

Teorema 2.23 (Segundo Teorema del Bienestar) *Si las preferencias de todos los consumidores son estrictamente convexas, fuertemente monótonas y continuas, entonces todo Óptimo de Pareto Débil es soportado por un vector de precios $p \in \mathbb{R}^L_+$.*

Demostración

$\lceil$ Sea $(x^1, x^2, \ldots, x^I)$ un Óptimo de Pareto Débil. Para cada consumidor i definimos $V^i = \{y^i \in \mathbb{R}^L_+ | y^i \succ^i x^i\}$ y luego el conjunto $V = \{\sum_{i=1}^I y^i - \overline{\omega} | y^i \in V^i \forall i\}$. Como las preferencias son convexas, cada V^i es convexo y por lo tanto también los es V. Por la no saciedad local , cada V^i es no vacío y por lo tanto también los es V. Además $V \cap -\mathbb{R}^L_+ = \emptyset$, si no fuera así tendríamos una asignación $(y^1, \ldots, y^I$ tal que $\sum_{i=1}^I y^i - \overline{\omega} \leq 0$, es decir factible con $y^i \succ^i x^i$ para todo i, esto es imposible por ser $(x^1, x^2, \ldots, x^I)$ un Óptimo de Pareto Débil. Tenemos dos conjuntos (V y $-\mathbb{R}^L_+$) convexos, no vacíos y disjuntos, luego existe un hiperplano separador para ambos: $p \in \mathbb{R}^L$, $p \neq 0$ y $r \in \mathbb{R}$ tal que: $\forall y \in V$, $py \geq r$ y $\forall y \in -\mathbb{R}^L_+$, $py \leq r$. Como $0 \in -\mathbb{R}^L_+$ tenemos $r \geq 0$ luego $\forall y \in V$, $py \geq 0$.

Supongamos ahora para cierto j un $x \in \mathbb{R}^L_+$ tal que $x \succsim^j x^j$. Por la monotonicidad fuerte para cada i tenemos un y^i tal que $y^i \succ^i x^i$. Como las preferencias son estrictamente convexas, para $\alpha \in]0,1[$:

$$\alpha y^i + (1-\alpha)x^i \succ^i x^i$$

para $i \neq j$ y para j:

$$\alpha y^j + (1-\alpha)x \succ^j x^j$$

Luego

$$\sum_{i \neq j} (\alpha y^i + (1-\alpha)x^i) + (\alpha y^j + (1-\alpha)x) - \overline{\omega} \in V$$

y por lo tanto

$$p\left(\sum_{i \neq j} (\alpha y^i + (1-\alpha)x^i) + (\alpha y^j + (1-\alpha)x) - \overline{\omega}\right) \geq 0$$

haciendo α tender a 0:

$$p\left(\sum_{i \neq j} x^i + x - \overline{\omega}\right) \geq 0$$

Como $(x^1, x^2, \ldots, x^I)$ es factible $\sum_{i \neq j} x^i = \overline{\omega} - x^j$, reemplazando:

$$p\left(-x^j + x\right) \geq 0$$

Hemos probado es que si $x \succsim^j x^j$ entonces $px \geq px^j$, resta probar que $p \in \mathbb{R}^L_+$. Para esto tomemos el ℓ-ésimo vector canónico $e_\ell \in \mathbb{R}^L$, por la monotonicidad fuerte para todo $i: x^i + e_\ell \succ^i x^i$luego $p(x^i + e_\ell) \geq px^i$, de donde $p_\ell \geq 0$. $\rfloor$

Para que un óptimo de Pareto sea realmente una asignación de equilibrio con redistribución, la condición clave está dada en la proposición 2.22, la riqueza de cada individuo debe ser positiva.

2.5. Núcleo y Economías Repetidas

Sea una economía

$$\mathcal{E} = \{(\omega^i, \succcurlyeq^i) | i = 1, \dots I\}$$

en la sección anterior hemos estudiado las asignaciones factibles que no pueden ser mejoradas de manera conjunta para todos los consumidores de una economía. En esta sección estudiaremos cuáles son aquellas asignaciones factibles que no pueden ser mejoradas para ningún subconjunto de consumidores. Esta idea tiene estrecha relación con la teoría de los juegos cooperativos de donde toma prestados los términos de coalición, bloqueo y núcleo.

Definición 2.24 (Coalición) *Una coalición es cualquier subconjunto no vacío de I. Abusando de la notación denotaremos por S tanto a la coalición cómo al consumidores en ella.*

Definición 2.25 (Bloqueo) *Una coalición $S \subset I$ bloquea a una asignación factible $(x^i)_{i \in I} \in \mathbb{R}_+^{L \times I}$ si existe una asignación $(\hat{x}^i)_{i \in S} \in \mathbb{R}_+^{L \times S}$ tal que:*

1. *Para todo $i \in S$: $\hat{x}^i \succ^i x^i$*
2. $\sum_{i \in S} \hat{x}^i \leq \sum_{i \in S} w^i$

Es decir que una coalición bloquea una asignación para toda la economía si los miembros de ella pueden repartirse sus dotaciones iniciales (2) de manera que todos los consumidores de la coalición mejoran sus situación respecto de la asignación propuesta (1). en otras palabras, en la asignación propuesta, en términos de valor subjetivo la coalición aporta más a la economía de lo que recibe de ella. Es fácil ver que un óptimo de Pareto es una asignación que no es bloqueada por la coalición de todos los consumidores.

En virtud de estas interpretaciones, una asignación aceptable será aquella que no sea bloqueada por ninguna coalición.

Definición 2.26 (Núcleo) *El núcleo de una economía $\mathcal{N}(\mathcal{E})$ es el conjunto de todas las asignaciones factibles que no son bloqueadas por ninguna coalición.*

De la definición es directo que toda asignación del núcleo debe ser un óptimo de Pareto. Por otro lado se puede reformular la demostración del Primer Teorema del Bienestar y ver que toda asignación de equilibrio pertenece al núcleo. Los detalles de la demostración se dejan como ejercicio.

Teorema 2.27 *Dada una economía $\mathcal{E}$ con preferencias continuas, estrictamente convexas y fuertemente monótonas:*

$$\mathcal{W}(\mathcal{E}) \subset \mathcal{N}(\mathcal{E}) \subset \mathcal{P}(\mathcal{E})$$

Donde $\mathcal{W}(\mathcal{E})$ como el conjunto de todas las asignaciones de un Equilibrio Walrasiano y $\mathcal{P}(\mathcal{E})$ como el conjunto de todos los Óptimos de Pareto Débiles.

Como ya se dijo, la primera inclusión del anterior teorema puede ser vista como una extensión del Primer Teorema del Bienestar. Si tomamos ahora el Segundo Teorema del Bienestar, sabemos que bajo ciertas condiciones, todo OPd es un EW luego de redistribuir las dotaciones adecuadamente, por lo tanto también pertenece al núcleo luego de la redistribución. En esta línea se tiene en realidad un resultado más fuerte, que puede ser resumido de manera poco precisa en la idea que "si la economía es grande el núcleo es pequeño".

Para formalizar esta ideas usaremos la construcción teórica de "economías replicadas".

Definición 2.28 (N-Réplica) *Dada una economía $\mathcal{E} = \{(\omega^i, \succcurlyeq^i)|i = 1, \dots I\}$ consideramos un N-replica a la economía:*

$$\mathcal{E}^{\mathcal{N}} = \{(\omega^{ij}, \succcurlyeq^{ij})|i = 1, \dots I, j = 1, \dots N\}$$

donde cada consumidor con índice ij es idéntico al consumidor de $\mathcal{E}$ con índice i.

En lo que sigue mostraremos que conforme crece N, el núcleo de la N-réplica se contrae y converge al conjunto de las asignaciones de equilibrio. El primer resultado simplifica el manejo del núcleo de las sucesivas réplicas.

Proposición 2.29 *Dada una economía $\mathcal{E}$ con preferencias continuas, estrictamente convexas y fuertemente monótonas, en toda asignación del núcleo de una N-réplica, todos los consumidores del mismo tipo reciben la misma canasta, si $(x^{11}, \dots, x^{1N}, \dots, x^{in}, \dots, x^{I1}, \dots, x^{IN} \in \mathcal{N}(\mathcal{E}^{\mathcal{N}})$ entonces para todos i, n, m: $x^{in} = x^{im}$*

Demostración

$\lceil$ Consideremos una asignación x en la que al menos un par de consumidores del mismo tipo no obtienen la misma canasta, probaremos que esta asignación es bloqueada por cierta coalición y por lo tanto no pertenece al núcleo. Sin perder generalidad podemos especificar los índices los consumidores y suponer una asignación para la N-réplica tal que $x^{11} \neq x^{12}$ con $i1$ el consumidor de tipo i peor tratado entre los de su tipo: $x^{in} \succcurlyeq^i x^{i1}$ con $x^{1n} \succ^1 x^{11}$.

Definimos:

$$\hat{x}^i = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} x^{in}$$

como las preferencias son estrictamente convexas tenemos que

$$\begin{array}{ccc} \hat{x}^i & \succcurlyeq^i & x^{i1} \\ \hat{x}^1 & \succ^1 & x^{11} \end{array} \tag{2.1}$$

Consideremos entonces la coalición $S = \{11, 21, \dots, i1, \dots I1\}$ y para esta la asignación: $\hat{x} = (\hat{x}^1, \dots, \hat{x}^I)$. Esta asignación es S-factible:

$$\sum_{i=1}^{I} \hat{x}^i = \sum_{i=1}^{I} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} x^{in} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{I} \sum_{n=1}^{N} x^{in} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{I} \sum_{n=1}^{N} \omega^i = \frac{1}{N} N \sum_{i=1}^{I} \omega^i = \sum_{i=1}^{I} \omega^i$$

Entonces por 2.1, tenemos que la coalición S bloquea x $\rfloor$

La proposición anterior nos permite representar al núcleo de cualquier réplica indicando la canasta que reciben los consumidores de acuerdo a su tipo:

$$C_N = \{(x^1, \dots, x^I) \in \mathbb{R}^{IL}|(x^1, \dots, x^I, \dots, x^1, \dots, x^I) \in \mathbb{R}^{ILN} \text{ pertenece a } \mathcal{N}(\mathcal{E}^{\mathcal{N}})\}$$

Como toda asignación de equilibrio de una N-réplica está en su núcleo, entonces también cumple la propiedad de que todos los consumidores del mismo tipo reciben la misma canasta. Entonces es directo que toda asignación de equilibrio de una N-réplica es la correspondiente N-réplica de una asignación de equilibrio de la economía original. De esta forma $\mathcal{W}(\mathcal{E})$ representa a $\mathcal{W}(\mathcal{E}^{\mathcal{N}})$ para todo N.

Daremos ahora un resultado sencillo pero importante:

Teorema 2.30 *Dada una economía $\mathcal{E}$ con preferencias continuas, estrictamente convexas y fuertemente monótonas, para todo $N = 1, 2, \ldots$:*

$$\mathcal{W}(\mathcal{E}) \subset C_{N+1} \subset C_N$$

Demostración

⌈ La inclusión $\mathcal{W}(\mathcal{E}) \subset C_{N+1}$ es directa. Para ver que $\subset C_{N+1} \subset C_N$ basta notar que toda coalición que se forme en un N-réplica se puede formar en una $N+1$-réplica, así que si una asignación no es bloqueada en la $N+1$-réplica no puede ser bloqueada la N-réplica. ⌋

Una lectura de este resultado es que conforme vamos replicando la economía el núcleo se contrae, mientras las asignaciones de equilibrio permanecen las mismas. Veremos a continuación que en el límite el núcleo coincide con las asignaciones de equilibrio.

Teorema 2.31 *Dada una economía $\mathcal{E}$ con preferencias continuas, estrictamente convexas y fuertemente monótonas, para todo $N = 1, 2, \ldots$:*

$$\mathcal{W}(\mathcal{E}) = \bigcap_{N=1}^{\infty} C_N$$

Demostración

⌈ La inclusión $\mathcal{W}(\mathcal{E}) \subset \bigcap_{N=1}^{\infty} C_N$ se infiere del teorema anterior.

Para $\mathcal{W}(\mathcal{E}) \supset \bigcap_{N=1}^{\infty} C_N$, probaremos que si $x \in C_N$ para todo N entonces $x \in \mathcal{W}(\mathcal{E})$. Empecemos definiendo los conjuntos

$$\begin{aligned} U^i &= \{y \in \mathbb{R}^L_+ | y \succ^i x^i\} \\ V^i &= U^i - \omega^i \end{aligned}$$

Como las preferencias son fuertemente monótonas si $y > x^i$, $y \in U^i$ y por la tanto $y - \omega^i \in V^i$, en particular ambos conjuntos son no vacíos. También son convexos por la convexidad de las preferencias. Tomemos ahora el conjunto $\cup_{i=1}^{I} V^i$, cómo no podemos asegurar su convexidad consideremos su cápsula convexa:

$$V = \left\{ \sum_{i=1}^{I} \alpha^i v^i \middle| v^i \in V^i,\ \alpha^i \geq 0,\ \sum_{i=1}^{I} \alpha^i = 1 \right\}$$

Si $0 \in V$ entonces tendríamos $v^i \in V^i$ y $\alpha^i \geq 0$ tales que: $\sum_{i=1}^{I} \alpha^i = 1$ y

$$\sum_{i=1}^{I} \alpha^i v^i = 0$$

Tomando $v^i = y^i - \omega^i$ con $y^i \in U^i$ tenemos que:

$$\sum_{i=1}^{I} \alpha^i y^i = \sum_{i=1}^{I} \alpha^i \omega^i$$

Como algunos α^i pueden ser nulos (pero no todos!) tomemos el conjunto $S = \{i|\alpha^i > 0\}$ y reescribimos

$$\sum_{i \in S} \alpha^i y^i = \sum_{i \in S} \alpha^i \omega^i$$

A partir de este conjunto S contruiremos una coalición que en cierta réplica bloquea a x. Tomemos la N-réplica y para cada tipo $i \in S$ de consumidor tomemos n^i agentes, donde n^i es el menor entero mayor o igual a $N\alpha^i$:

$$N\alpha^i \leq n^i \leq N\alpha^i + 1$$

operando obtenemos:

$$\frac{n^i - 1}{n^i} \leq \frac{N\alpha^i}{n^i} \leq 1$$

cuando N tiende a infinito también lo hace n^i, por lo tanto:

$$\lim_{N \to +\infty} \frac{N\alpha^i}{n^i} = 1$$

Luego como $y^i \succ^i x^i$ y las preferencias son continuas, para N suficientemente grande: $\frac{N\alpha^i}{n^i} y^i \succ^i x^i$ Para dicho N tomamos la coalición formada por n^i agentes de tipo $i \in S$ y le asignamos a cada uno la canasta $\frac{N\alpha^i}{n^i} y^i$ preferida a x^i. Esta asignación es factible para la coalición:

$$\sum_{i \in S} n^i \frac{N\alpha^i}{n^i} y^i = \sum_{i \in S} N\alpha^i y^i = N \sum_{i \in S} \alpha^i y^i = N \sum_{i \in S} \alpha^i \omega^i = \sum_{i \in S} N\alpha^i \omega^i \leq \sum_{i \in S} n^i \omega^i$$

Esto es imposible por que la asignación x está en el núcleo de toda N-réplica, luego no puede ser cierto que $0 \in V$.

Como V es convexo y $0 \notin V$ por el Teorema de Separación, existe $p \in \mathbb{R}^L$, $p \neq 0$ tal que $p \cdot v \geq p \cdot 0 = 0$ para todo $v \in V$. Como en V podemos tener vectores con cualquiera de sus componentes arbitrariamente grande se concluye que $p \in \mathbb{R}^L_+$. Ahora, para todo i si $y \succ^i x^i$ entonces $y - \omega^i \in V^i \subset V$ y $p \cdot y \geq p \cdot \omega^i$. Para terminar la demostración necesitamos mostrar que $p \gg 0$, $p \cdot x^i = p \cdot \omega^i$ y que $y \succ^i x^i \Rightarrow p \cdot y > p \cdot \omega^i$.

Por la monotonicidad de las preferencias, para todo i: $x^i + (\epsilon, \epsilon, \ldots, \epsilon) \succ^i x^i$ con $\epsilon > 0$, luego $p \cdot (x^i + (\epsilon, \epsilon, \ldots, \epsilon)) \geq p \cdot \omega^i$ si hacemos $\epsilon \to 0$ tendremos que $p \cdot x^i \geq p \cdot \omega^i$, sumando sobre i:

$$\sum_{i=1}^{I} p \cdot x^i \geq \sum_{i=1}^{I} p \cdot \omega^i$$

por otro lado x es una asignación factible, luego $\sum_{i=1}^{I} x^i \leq \sum_{i=1}^{I} \omega^i$, multiplicando por $p \in \mathbb{R}^L_+$:

$$\sum_{i=1}^{I} p \cdot x^i \leq \sum_{i=1}^{I} p \cdot \omega^i$$

Luego $\sum_{i=1}^{I} p \cdot x^i = \sum_{i=1}^{I} p \cdot \omega^i$ por lo que para cada i

$$p \cdot x^i = p \cdot \omega^i$$

Consideremos ahora $y \succ^i x^i$ con $p \cdot y = p \cdot \omega^i$. Por monotonicidad $y \neq 0$ y por continuidad de las preferencias, para $0 < \delta < 1$: $\delta y \succ^i x^i$, luego $p \cdot \delta y \geq p \cdot \omega^i$. Luego tenemos:

$$\delta(p \cdot y) < p \cdot y = p \cdot \omega^i \leq p \cdot \delta y = \delta(p \cdot y)$$

contradicción que prueba que

$$y \succ^i x^i \Rightarrow p \cdot y > p \cdot \omega^i$$

Finalmente tomemos $x^i + \epsilon e_\ell \succ^i x^i$, luego $p \cdot (x^i + \epsilon e_\ell) > p \cdot \omega^i = p \cdot x^i$, de donde

$$p_\ell > 0$$

$\rfloor$

2.6. Ejercicios

1. Sea el consumidor 1 con preferencias representadas por

$$U_1(x_1, x_2) = x_1 x_2$$

y con dotación inicial $\omega_1 = (2, 6)$. El consumidor 2 tiene

$$U_2(x_1, x_2) = \text{mín}\{x_1, x_2\}$$

y dotación inicial $\omega_2 = (4, 1)$. Considerando $p \in R^2_{++}$:

a) Encuentra la función (correspondencia) de demanda de cada consumidor.

b) Encuentra la función (correspondencia) de exceso de demanda de la economía ($Z(p_1, p_2)$).

c) Verifique si Z cumple las cinco propiedades usuales de una FED

d) ¿Existe equilibrio en esta economía?.

e) ¿Cuáles son los Óptimos de Pareto?.

2. Sea el consumidor 1 con preferencias representadas por

$$U_1(x_1, x_2) = (x_2 + 1)e^{x_1}$$

y con dotación inicial $\omega_1 = (2, 1)$. El consumidor 2 tiene

$$U_2(x_1, x_2) = x_1 x_2$$

y dotación inicial $\omega_2 = (2, 3)$. Considerando $p \in R^2_{++}$:

a) Encuentra la función (correspondencia) de demanda de cada consumidor.

b) Encuentra la función (correspondencia) de exceso de demanda de la economía ($Z(p_1, p_2)$).

c) Verifique si Z cumple las cinco propiedades usuales de una FED

d) ¿Existe equilibrio en esta economía? ¿Cuál es?

e) ¿Cuáles son los Óptimos de Pareto?

3. Sea el consumidor 1 con preferencias dadas de la siguiente manera:

$$(x_1, x_2) \succ (x_1', x_2') \iff \begin{array}{l} (x_1 - 3)^2 < (x_1' - 3)^2 \\ \text{o} \\ (x_1 - 3)^2 = (x_1' - 3)^2 \text{ y } x_2 > x_2' \end{array}$$

y con dotación inicial $\omega_1 = (2, 6)$. El consumidor 2 tiene $U_2(x_1, x_2) = x_1 x_2$, $\omega_2 = (4, 0)$. Considerando $p \in R^2_{++}$:

a) Encuentra la función (correspondencia) de demanda de cada consumidor.

b) Encuentra la función (correspondencia) de exceso de demanda de la economía ($Z(p_1, p_2)$).

c) ¿Es Z homogénea de grado cero?, es continua?, se cumple $pZ(p) = 0$?

d) ¿Qué pasa con $Z(p^n)$ cuando p^n tiende a $(0, 1)$?.

e) ¿Existe equilibrio en esta economía?.

f) ¿Cuáles son los Óptimos de Pareto?.

Responde a todas las preguntas anteriores, ahora considerando que las dotaciones iniciales son:

$\omega_1 = (0, 4)$ y $\omega_2 = (6, 2)$.

4. Sea una economía de dos bienes y dos consumidores. El consumidor A con preferencias representadas por

$$U^A(x, y) = -(x - 6)^2 - (y - 4)^2$$

con dotación inicial $\omega^A = (5, 2)$. El consumidor B tiene

$$U^B(x, y) = -(x - 5)^2 - (y - 5)^2$$

y dotación inicial $\omega^B = (3, 4)$.

a) ¿Es la asignación $((0, 0); (8, 6))$ un Óptimo de Pareto?, ¿Fuerte?, ¿Débil?

b) Encuentra la demanda de cada consumidor.

c) Encuentra el exceso de demanda de la economía ($Z(p_x, p_y)$).

d) ¿Existe equilibrio en esta economía? ¿Cuál es?

e) Verifica si Z cumple las 5 propiedades de la FEDA usadas para la demostración de la existencia de equilibrio.

f) Si alguna propiedad no se cumple, busque una explicación.

5. Dados $a, b \in \mathbb{R}^L \setminus \{0\}$ y $\omega \in \mathbb{R}^L_{++}$, estudie si la función $\Upsilon : \mathbb{R}^L_{++} \longrightarrow \mathbb{R}^L$ definida por

$$\Upsilon(p) = \frac{p \cdot a}{p \cdot \omega} b - \frac{p \cdot b}{p \cdot \omega} a$$

puede ser una función exceso de demanda de acuerdo a las propiedades.

6. Si la siguiente función

$$Z(p_1, p_2) = \left(\frac{ap_2}{bp_1 + cp_2} + \frac{dp_1 + ep_2}{fp_i}, \frac{gp_1}{hp_1 + kp_2} + \frac{p_1 + l}{mp_2} \right)$$

es el exceso de demanda de una economía de intercambio puro.

a) Para cada una de las posible propiedades de las preferencias de los consumidores de esta economía: Continuidad, Convexidad, convexidad estricta, monotonicidad, monotonicidad fuerte y no saciedad local: ¿Qué restricciones sobre los parámetros $a, b, c, d, e, f, g, h, i, j, k, l, m, n$ imponen?

b) Suponiendo que dichas preferencias son continuas, estrictamente convexas y fuertemente monótonas, encuentra los precios de equilibrio de esta economía.

7. Sea el consumidor 1 con preferencias representadas por

$$U_1(x_1, x_2) = x_1 x_2$$

y con dotación inicial $\omega_1 = (2, 6)$. El consumidor 2 tiene

$$U_2(x_1, x_2) = \min\{x_1, x_2\}$$

y dotación inicial $\omega_2 = (4, 1)$. Considerando $p \in R^2_{++}$:

a) Encuentra la función (correspondencia) de demanda de cada consumidor.

b) Encuentra la función (correspondencia) de exceso de demanda de la economía ($Z(p_1, p_2)$).

c) Verifique si Z cumple las cinco propiedades usuales de una FED

d) ¿Existe equilibrio en esta economía?.

8. Sea el consumidor 1 con preferencias representadas por

$$U_1(x_1, x_2) = (x_2 + 1)e^{x_1}$$

y con dotación inicial $\omega_1 = (2, 1)$. El consumidor 2 tiene

$$U_2(x_1, x_2) = x_1 x_2$$

y dotación inicial $\omega_2 = (2, 3)$. Considerando $p \in R^2_{++}$:

a) Encuentra la función (correspondencia) de demanda de cada consumidor.

b) Encuentra la función (correspondencia) de exceso de demanda de la economía $(Z(p_1, p_2))$.

c) Verifique si Z cumple las cinco propiedades usuales de una FED

d) ¿Existe equilibrio en esta economía? ¿Cuál es?

9. Sea el consumidor 1 con preferencias dadas de la siguiente manera:

$$(x_1, x_2) \succ (x_1', x_2') \iff \begin{array}{l} (x_1 - 3)^2 < (x_1' - 3)^2 \\ \text{o} \\ (x_1 - 3)^2 = (x_1' - 3)^2 \text{ y } x_2 > x_2' \end{array}$$

y con dotación inicial $\omega_1 = (2, 6)$. El consumidor 2 tiene $U_2(x_1, x_2) = x_1 x_2$, $\omega_2 = (4, 0)$. Considerando $p \in R^2_{++}$:

a) Encuentra la función (correspondencia) de demanda de cada consumidor.

b) Encuentra la función (correspondencia) de exceso de demanda de la economía $(Z(p_1, p_2))$.

c) ¿Es Z homogénea de grado cero?, es continua?, se cumple $pZ(p) = 0$?

d) ¿Qué pasa con $Z(p^n)$ cuando p^n tiende a $(0, 1)$?.

e) ¿Existe equilibrio en esta economía?.

Responde a todas las preguntas anteriores, ahora considerando que las dotaciones iniciales son:

$\omega_1 = (0, 4)$ y $\omega_2 = (6, 2)$.

10. Sea $Z(p_1, p_2) = (B\frac{p_2}{p_1}, A\frac{p_1}{p_2}) - (A, B)$. Muestra que Z cumple las cinco propiedades demostradas para las funciones exceso de demanda. Encuentra la forma que toma la correspondencia $f(p)$ de la demostración de existencia de equilibrio.

11. Considera una economía de intercambio puro 2x2 con los siguientes consumidores:

- $u_1(x, y) = 2x + y$ y $w = (2, 3)$.
- $u_2(x, y) = xy^3$ y $w = (1, 2)$.

a) Encuentra la demanda de cada consumidor.

b) Encuentra el equilibrio Walrasiano.

c) Determina el conjunto de los óptimos de Pareto

d) Dibuja la caja de Edgeworth, ubica los óptimos de Pareto, la curva de contrato y el equilibrio Walrasiano

12. Dibuja la Caja de Edgeworth con $U_1(x_1, x_2) = x_1 + x_2$, $\omega_1 = (1, 2)$, $U_2(x_1, x_2) = \min\{x_1, x_2\}$, $\omega_2 = (3, 4)$, identificando el equilibrio, el conjunto de Optimos de Pareto y la curva de contrato.

13. Considera una economía de intercambio puro de dos consumidores:

- Consumidor A: $U_A(x_{A1}, x_{A2}) = x_{A1}x_{A2} - \sqrt{x_{B1}}$, $\omega_A = (1, 0)$.
- Consumidor B: $U_B(x_{B1}, x_{B2}) = x_{B1}x_{B2} - \sqrt{x_{B2}}$, $\omega_B = (0, 1)$.

Encuentra el equilibrio Walrasiano (los consumidores son precios-tomantes y solo eligen su consumo) y verifica si es un óptimo de Pareto. ¿Puedes explicar qué sucede?

14. Considera una economía de intercambio puro 2x2 con los siguientes consumidores:

    - $u_1(x, y) = 2x + y$ y $w = (2, 3)$.
    - $u_2(x, y) = xy^3$ y $w = (1, 2)$.

    a) Encuentra la demanda de cada consumidor.

    b) Encuentra el equilibrio Walrasiano.

    c) Dibuja la caja de Edgeworth y ubica el equilibrio Walrasiano.

15. Encuentra los precios de equilibrio para la economia de intercambio puro de L bienes formada por N consumidores. El consumidor i tiene funcion utilidad $U_i(x) = \prod_{j=1}^{L} x_j^{\alpha_{ij}}$ con $\sum_{j=1}^{L} \alpha_{ij} = 1$ y dotacion inicial w_i. Puedes probar primero con $L = 3$, $N = 4$.

16. Considere una economía de intercambio puro de dos bienes y dos consumidores ($a, b > 0$):

    - Consumidor 1: $u_1(x_1, y_1) = (x_1)^a y_1$ con dotación inicial $\omega_1 = (1, 0)$.
    - Consumidor 2: $u_2(x_2, y_2) = x_2(y_2)^b$ con dotación inicial $\omega_2 = (0, 1)$.

    Encuentre los precios(asuma $p_1 = 1$) y la asignación de equilibrio.

17. Considera una economía de intercambio puro de dos consumidores:

    - Consumidor A: $U_A(x_{A1}, x_{A2}) = x_{A1}x_{A2} - \sqrt{x_{B1}}$, $\omega_A = (1, 0)$.
    - Consumidor B: $U_B(x_{B1}, x_{B2}) = x_{B1}x_{B2} - \sqrt{x_{B2}}$, $\omega_B = (0, 1)$.

    Encuentra el equilibrio Walrasiano (los consumidores son precios-tomantes y solo eligen su consumo).

18. ¿En cuál parte de la demostración de la existencia de equilibro se usa la propiedad:

    $$\exists s > 0 \text{ tal que } \forall \ell = 1, \ldots, L\,,\ \forall p \in R^L_{++} : Z_\ell(p) > -s$$

19. Considere una economía de intercambio puro de dos bienes y dos consumidores ($a, b > 0$):

    - Consumidor 1: $u_1(x_1, y_1) = (x_1)^a y_1$ con dotación inicial $\omega_1 = (1, 0)$.
    - Consumidor 2: $u_2(x_2, y_2) = x_2(y_2)^b$ con dotación inicial $\omega_2 = (0, 1)$.

    Encuentre los precios(asuma $p_1 = 1$) y la asignación de equilibrio.

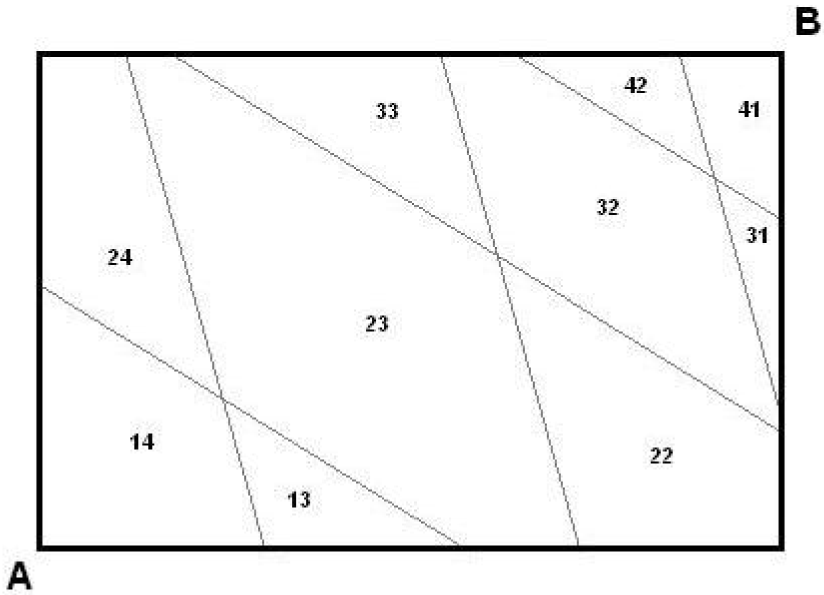

Figura 2.1: Caja de Edgeworth para la Pregunta 20

20. La caja de Edgeworth de la Figura 2.1 muestra las preferencias de dos consumidores: Los consumidores tienen unas preferencias por regiones:

    - **A** $41 \sim 42 \succ 31 \sim 32 \sim 33 \succ 22 \sim 23 \sim 24 \succ 14 \sim 13$
    - **B** $14 \sim 24 \succ 13 \sim 23 \sim 33 \succ 22 \sim 32 \sim 42 \succ 31 \sim 41$

    a) Encuentra los óptimos de Pareto.

    b) Si las dotaciones iniciales están en la región 23, cual es el núcleo?

    c) Considera la siguiente definición: ϋna asignación es un óptimo débil de Pareto si no existe otra asignación preferida por todos los agentes".

    1) Formaliza la definición.
    2) ¿Cuales son los óptimos débiles de Pareto de este ejercicio?
    3) ¿Cual es la relación entre las dos definiciones de optimalidad Paretiana? ¿Cuando las dos definiciones son equivalentes?

21. (Tomado de [6]) Supongamos una economía de intercambio puro donde todos los consumidores tienen las mismas preferencias. ¿Cuáles son los requisitos mínimos sobre estas preferencias para que la asignación donde todos reciben la misma canasta sea un Óptimo de Pareto?

22. (Tomado de [5]) Suponga una economía de intercambio puro con 2 bienes y 2 consumidores idénticos, es decir con la misma dotación inicial y las mismas preferencias (racionales, continuas, fuertemente monótonas y estrictamente convexas). Dibuje la caja de Edgeworth, estudie los Óptimos de Pareto, el núcleo y el Equilibrio Walrasiano.

23. Dibuja la Caja de Edgeworth con $U_1(x_1, x_2) = x_1 + x_2$, $\omega_1 = (1, 2)$, $U_2(x_1, x_2) = \min\{x_1, x_2\}$, $\omega_2 = (3, 4)$, identificando el equilibrio, el conjunto de Optimos de Pareto y la curva de contrato.

24. Sea una economía de intercambio $\mathcal{E}$ con L bienes y N consumidores $(\succsim_i, \omega_i)$ con preferencias estrictamente convexas. En esta economía la asignación factible $(x_1, \ldots, x_N)$ es un óptimo de Pareto. Si consideramos ahora la economía $\mathcal{E}^2$ de L bienes y $2N$ consumidores donde, para $i = 1, \ldots, N$, el consumidor i y el consumidor $i + N$ son idénticos al consumidor i de $\mathcal{E}$, pruebe que la asignación $(x_1, \ldots, x_N, x_1, \ldots, x_N)$ es un óptimo de Pareto de $\mathcal{E}^2$. ¿Se puede relajar la suposición sobre las convexidad de las preferencias?

25. (Tomado de [5])Supongamos una economía de intercambio puro donde todos los consumidores tienen las mismas preferencias. ¿Cuáles son los requisitos mínimos sobre estas preferencias para que la asignación donde todos reciben la misma canasta sea un Óptimo de Pareto?

26. (Tomado de [1])Sea una economía de intercambio puro con dos consumidores, $i = 1, 2$, con preferencias representadas por utilidades $U_i : \mathbb{R}^L_+ \to \mathbb{R}$ continuas, fuertemente monótonas y estrictamente convexas. y dotaciones iniciales $\omega_i \in \mathbb{R}^L_{++}$. Muestre que una asignación $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^L_+ \times \mathbb{R}^L_+$ es un Óptimo de Pareto Fuerte si y solo si existen $\alpha_i \geq 0$ con $\alpha_1 + \alpha_2 = 1$ tal que (x_1, x_2) es solución de:

$$\begin{aligned} \text{máx} \quad & \alpha_1 u_1(x_1) + \alpha_2 u_2(x_2) \\ s.a. \quad & x_1 + x_2 \leq \omega_2 + \omega_2 \\ & x_1 \geq 0 \\ & x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

27. Sea una economía de dos bienes y dos consumidores. El consumidor 1 con preferencias representadas por

$$U_1(x_1, x_2) = 2x_1 + x_2$$

y dotación inicial $\omega_1 = (3, 5)$. El consumidor 2 tiene

$$U_2(x_1, x_2) = x_1^3 x_2^6$$

y dotación inicial $\omega_2 = (6, 4)$.

   a) Dibuje la caja de Edgeworth identificando las dotaciones iniciales, los óptimos de Pareto y el núcleo de la economía.

   b) Tome la asignación del núcleo preferida por el consumidor 1 y muestre que no está en el núcleo de la 2-réplica (revise la demostración sobre la convergencia del núcleo).

28. (Tomado de [1]) Dada una economía de intercambio puro, decimos que una asignación factible $(x^1, \ldots, x^I)$ es una asignación de:

QuasiEquilibrio con Redistribución si existe $p \in \mathbb{R}^L_+$ y $(W^1, \ldots, , W^I) \in \mathbb{R}^I_+$ tal que:

a) $\sum_{i=1}^{I} W^i = p\bar{\omega}$

b) Para cada i, si $x \succ^i x^i$ entonces $px^i \geq W^i$

c) $\sum_{i=1}^{I} x^i = \bar{\omega}$

y es una asignación de:

Equilibrio con Redistribución si existe $p \in \mathbb{R}^L_{++}$ y $(W^1, \ldots, , W^I) \in \mathbb{R}^I_+$ tal que:

d) $\sum_{i=1}^{I} W^i = p\bar{\omega}$

e) Para cada i, si $x \succ^i x^i$ entonces $px^i > W^i$

f) $\sum_{i=1}^{I} x^i = \bar{\omega}$

Pruebe que si $(x^1, \ldots, x^I)$ es un QER con $W^i > 0$ para todo i, entonces es un ER.

Capítulo 3

Empresas

Las empresas son agentes económicos con la capacidad de transformar canastas de bienes. Tendremos $J \in \mathbb{N}$ empresas, cada una identificada por un indice $j = 1, \ldots, J$. Cada empresa j está definida por sus posibilidades de transformación de canastas, lo que llamaremos tecnología. El objetivo de cada empresa será maximixar su beneficio bajo las restricciones dadas por su tecnología. El resultado de esta maximización será su función oferta y su función beneficio. Al ser nuestro modelo una economía totalmente cerrada el beneficio es repartido entre los consumidores de acuerdo a la participación de cada uno de ellos en cada empresa.

3.1. Tecnologías

De manera formal cada empresa j tendrá una tecnología definida por un conjunto $Y^j \subset \mathbb{R}^L$. A cada elemento $y \in Y^j$ se le llama plan de producción factible, y tiene la siguiente interpretación:

- Si $y_\ell < 0$ el bien ℓ es usado como insumo en la cantidad $|y_\ell| = -y_\ell$.
- Si $y_\ell > 0$ el bien ℓ es producido en la cantidad $|y_\ell| = y_\ell$.
- Si $y_\ell = 0$ el bien ℓ no forma parte del plan de producción.

De esta forma, el plan de producción y representa la transformación de la canasta $-\text{mín}\{y, 0\}$ en la canasta $\text{máx}\{y, 0\}$.

En lo que sigue asumiremos siempre que toda tecnología es un conjunto no vacío y cerrado. Otras propiedades que podemos pedir a una tecnología son las siguientes:

Definición 3.1 (Posibilidades) *Una tecnología $Y \subset \mathbb{R}^L$ presenta:*

1. ***Posibilidad de Inactividad**, si $0 \in Y$*
2. ***Posibilidad de Libre Deshecho**, si $y \in Y$ y $y' \leq y$ implica $y' \in Y$.*
3. ***No Gratuidad**, si $y \in Y$ con $y \geq 0$ implica $y = 0$.*
4. ***Acotada Superiormente**, si existe $K \in \mathbb{R}$ tal que todo $y \in Y$ cumple $y_\ell \leq K$ para todo $\ell = 1, 2, \ldots, L$.*

La posibilidad de inactividad indica que la empresa siempre puede dejar de operar sin incurrir en costos. Libre deshecho implica que la empresa siempre puede usar más insumos de los necesarios y/o ofrecer al mercado menos de lo físicamente producido. La no gratuidad nos dice que no es posible producir algún producto sin usar ningún insumo. La acotación superior limita la cantidad máxima que se puede obtener de todo producto.

Hay varias propiedades relacionadas con la "forma" de Y, nosotros necesitamos:

Definición 3.2 (Convexidad) *Una tecnología $Y \subset \mathbb{R}^L$ se dice convexa cuando Y como subconjunto de $\mathbb{R}^L$ es convexo. La tecnología será estrictamente convexa si Y es estrictamente convexo, es decir que cumple:*

$$\forall y, y' \in Y, y \neq y', \forall \alpha \in]0,1[: \alpha y + (1-\alpha)y' \in \overset{\circ}{Y}$$

3.2. Oferta y Beneficio

Dados los precios $p \gg 0$ el beneficio para la empresa de realizar el plan de producción y es simplemente py. Este beneficio podemos expresarlo como

$$py = p \max\{y, 0\} + p \min\{y, 0\} = p \max\{y, 0\} - p(-\min\{y, 0\}) = I_y - C_y$$

donde $I_y = p \max\{y, 0\}$ es el ingreso por la venta de los productos y $C_y = p(-\min\{y, 0\})$ es el costo total de los insumos usados.

El objetivo de cada empresa será maximizar su beneficio bajo las restricciones dadas por su tecnología:

$$\begin{aligned} Max \quad & py \\ s.a. \quad & y \in Y \end{aligned} \tag{3.1}$$

Este problema no necesariamente tiene solución:

Teorema 3.3 *Dada una tecnología Y no vacía, cerrada y acotada superiormente, entonces $\forall p \in \mathbb{R}^L_{++}$ existe $\hat{y} \in Y$ tal que $\forall y \in Y$: $p\hat{y} \geq py$.*

Demostración

⌈ Como Y es no vacía tomemos $\bar{y} \in Y$ y definamos:

$$Y_p = \{y \in Y | py \geq p\bar{y}\}$$

Es obvio que Y_p es no vacío y que si existe el plan de producción $\hat{y}$ buscado, este debe estar en Y_p y maximizar también el producto py. Como el producto interno es una aplicación continua, si Y_p es compacto la existencia de $\hat{y}$ estará asegurada. Como $Y_p = Y \bigcap \{y \in \mathbb{R}^L | py \geq p\bar{y}\}$, es la intersección de dos cerrados, entonces es cerrado. Probemos ahora que también es acotado.

Para cada $\ell = 1, 2, \ldots, L$ definimos:

$$k_\ell = \frac{p\bar{y} - K\sum_{i\neq\ell} p_i}{p_\ell}$$

y

$$\underline{K} = \min_{\ell=1,\ldots,L} k_\ell$$

Si tenemos $y \in Y$ tal que para cierto ℓ: $y_\ell < \underline{K}$ entonces:

$$py = p_\ell y_\ell + \sum_{i \neq \ell} p_i y_i < p_\ell \underline{K} + K \sum_{i \neq \ell} p_i = p_\ell \underline{K} + (p\bar{y} - p_\ell k_\ell) = p\bar{y} + p_\ell(\underline{K} - k_\ell) \leq p\bar{y}$$

es decir $y \notin Y_p$.

En resumen si $y \in Y_p$ entonces para todo ℓ:

$$\underline{K} \leq y_\ell \leq K$$

$\rfloor$

El teorema anterior nos asegura la buena definición de la función:

$$\pi(p) = \begin{array}{ll} Max & py \\ s.a. & y \in Y \end{array}$$

y de la correspondencia:

$$y(p) = \{y \in Y | py = \pi(p)\}$$

ambas con dominio en $\mathbb{R}^L_{++}$. La función $\pi(p)$ es la función beneficio (máximo) de la empresa y la correspondencia $y(p)$ es la oferta de la empresa. Hay que notar que los elementos de $y(p)$ tienen entradas positivas y negativas. Las positivas son efectivamente las cantidades, de los bienes correspondientes, ofrecidas en el mercado por la empresa. Las entradas negativas son a su vez las cantidades, de los bienes correspondientes, demandadas en el mercado por la empresa.

En el capítulo siguiente, donde vemos economías con producción, el beneficio y la oferta formaran parte de la determinación del equilibrio. Estableceremos aquí sus propiedades.

Teorema 3.4 *Dada una tecnología Y no vacía, cerrada y acotada superiormente, el beneficio y la oferta correspondientes cumplen:*

1. *$\pi(p)$ es homogénea de grado 1 y convexa*
2. *$y(p)$ es homogénea de grado 0.*
3. *Si Y es convexa, $y(p)$ es de imagen convexa. Si Y es estrictamente convexa, $y(p)$ es de imagen unitaria.*
4. *$y(\mathbb{R}^L_{++})$ es acotado superiormente.*

Demostración

$\lceil$

1. Para ver la homogeneidad, tomemos $\alpha > 0$:

$$\pi(\alpha p) = Max_{y\in Y}(\alpha p)y = Max_{y\in Y}\alpha(py) = \alpha\left(Max_{y\in Y}py\right) = \alpha\pi(p)$$

   Por su parte la convexidad se establece de la siguiente manera, con $\alpha \in [0,1]$ y p, $p' \in \mathbb{R}^L_{++}$:

$$\pi(\alpha p + (1-\alpha)p') = Max_{y\in Y}(\alpha p + (1-\alpha)p')y = Max_{y\in Y}\alpha py + (1-\alpha)p'y$$
$$\leq Max_{y\in Y}\alpha py + Max_{y\in Y}(1-\alpha)p'y = \alpha Max_{y\in Y}py + (1-\alpha)Max_{y\in Y}p'y$$
$$= \alpha\pi(p) + (1-\alpha)\pi(p')$$

2. $y(\alpha p) = \{y \in Y|(\alpha p)y = \pi(\alpha p)\} = \{y \in Y|\alpha(py) = \alpha\pi(p)\} = \{y \in Y|py = \pi(p)\} = y(p)$

3. Sea Y es convexa, tomemos $\alpha \in [0,1]$ y y, $y' \in y(p)$, es decir $py = py' = \pi(p)$, de donde:

$$p(\alpha y + (1-\alpha)y') = \alpha(py) + (1-\alpha)(py') = \alpha\pi(p) + (1-\alpha)\pi(p) = \pi(p)$$

   con lo cual $\alpha y + (1-\alpha)y' \in y(p)$. Ahora sea Y es estrictamente convexa, supongamos y, $y' \in y(p)$ con $y \neq y'$ y tomamos $\alpha \in]0,1[$. Entonces $\alpha y + (1-\alpha)y' \in \overset{\circ}{Y}$ y para $\epsilon > 0$ suficientemente pequeño $\alpha y + (1-\alpha)y' + \epsilon p \in Y$ con

$$p(\alpha y + (1-\alpha)y' + \epsilon p) = \pi(p) + \epsilon||p||^2 > \pi(p)$$

   lo cual es una contradicción ya que $\pi(p)$ es el beneficio máximo en Y.

4. $y(\mathbb{R}^L_{++}) \subset Y$ que es acotado superiormente.

$\rfloor$

Teorema 3.5 *Dada una tecnología Y no vacía, cerrada, acotada superiormente y estrictamente convexa la función de oferta $y(p)$ es continua.*

Demostración

$\lceil$ Tomemos una secuencia de precios p^n en $\mathbb{R}^L_{++}$ que tienden a $p \in \mathbb{R}^L_{++}$, debemos mostrar que $y(p^n) \to y(p)$.

Primero mostraremos que la secuencia $y(p^n)$ es acotada, por la parte 4 del Teorema anterior tenemos una cota superior. Para la cota inferior, solo tenemos que preocuparnos de los términos $y_\ell(p^n) < 0$. Notemos primero que como p^n es convergente a $p \in \mathbb{R}^L_{++}$ entonces existen $r > 0$ y $s > 0$ tal que $\forall \ell = 1,\ldots,L$ y $\forall n = 1,2,3,\ldots : r < p^n_\ell < s$. Fijemos ahora $\bar{y} \in Y$ y definimos:

$$M := \sum_{\bar{y}_\ell<0} s\bar{y}_\ell + \sum_{\bar{y}_\ell>0} r\bar{y}_\ell \leq \sum_{\bar{y}_\ell<0} p^n_\ell\bar{y}_\ell + \sum_{\bar{y}_\ell>0} p^n_\ell\bar{y}_\ell = p^n\bar{y} \leq p^n y(p^n)$$

Ahora si $y_\ell(p^n) < 0$:

$$ry_\ell(p^n) \geq p^n_\ell y_\ell(p^n) \geq \sum_{y_\ell(p^n)<0} p^n_\ell y_\ell(p^n) \geq M - \sum_{y_\ell(p^n)>0} p^n_\ell y_\ell(p^n)$$

$$\geq M - \sum_{y_\ell(p^n)>0} sy_\ell(p^n) \geq M - \sum_{y_\ell(p^n)>0} sK \geq M - LsK$$

Con lo que hemos obtenido la cota inferior:

$$y_\ell(p^n) \geq \frac{M - LsK}{r}$$

Supongamos ahora que $y(p^n) \nrightarrow y(p)$, esto es que existe $\delta > 0$ y una subsecuencia $y(p^{n_k})$ tal que $||y(p^{n_k}) - y(p)|| > \delta$. Como subsecuencia de $y(p^n)$, $y(p^{n_k})$ también esa acotada y por lo tanto posee una subsecuencia convergente: $y(p^{n_{k_m}}) \to \hat{y}$ que cumple $||\hat{y} - y(p)|| > \delta$ Ahora para todo $y \in Y$ tenemos que: $p^{n_{k_m}} y(p^{n_{k_m}}) \geq p^{n_{k_m}} y$, tomando límites, como el producto interno es continuo: $p\hat{y} \geq py$ para todo $y \in Y$, es decir $\hat{y} = y(p)$ lo cual contradice $||\hat{y} - y(p)|| > \delta$. $\rfloor$

3.3. Ejercicios

1. (Tomado de [5]) Sea

$$Y = \{(x_1, x_2, \ldots, x_{L-1}, y) \mid y \leq f(x_1, x_2, \ldots, x_{L-1}) \ \wedge \ x_i \geq 0 \ i = 1, \ldots, L-1\}$$

   Es verdad que Y es convexa si y solo si f es convexa?.

2. (Tomado de [5]) Muestre que si Y es cerrado, convexo y cumple con $-\mathbb{R}^L_+ \subset Y$ entonces es de libre desecho ($Y - \mathbb{R}^L_+ \subset Y$).

3. De un ejemplo de una tecnologia Y que sea aditiva pero no convexa.

4. Dibuja una tecnología en R^2 que sea irreversible y otra que no lo sea.

5. (Tomado de [5] Sea f la función de producción asociada a una tecnología Y con un solo producto($Y = \{(x_1, x_2, \ldots, x_{L-1}, y) | y \leq f(x_1, x_2, \ldots, x_{L-1}) x_i \geq 0\}$). Muestre que Y tiene retornos a escala constantes si y solo si f es homogénea de grado uno.

6. (Tomado de [4]) Sea una empresa con la tecnología $Y = \{(-x, z) | x \geq 0\, , \, z \leq f(x)\}$. Demuestra que si Y es de libre disponibilidad (libre desecho, eliminación gratuita) entonces f es no decreciente.

7. Un plan de producción $y \in Y$ es eficiente si $\nexists y' \in Y$ tal que $y' \geq y$, $y' \neq y$. Muestre que si $y \in Y$ maximiza el beneficio para unos precios $p \gg 0$ entonces es eficiente.

8. (Tomado de [6]) Pruebe que si la tecnología Y es de retornos a escala no decrecientes entonces $\forall p \in T$ se tiene que $\pi(p) \leq 0$. Si además $0 \in Y$ entonces $\pi(p) = 0$.

9. (Tomado de [5] Para la tecnología de la Figura 3.1 :

   a) ¿Qué tipo de retornos exhibe esta tecnología?

   b) Encuentra el conjunto T de precios para los que el problema de la empresa tiene solución.

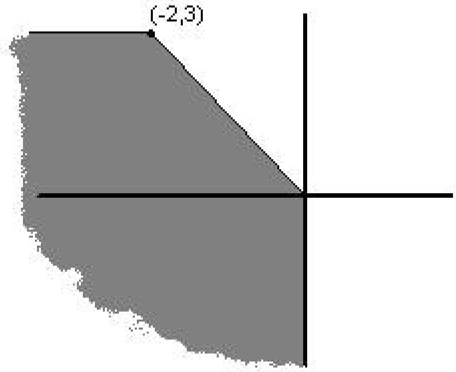

Figura 3.1: Tecnologia de la Pregunta 9

c) Encuentra la funcion/correspondencia de oferta de esta empresa.

d) ¿Cómo son sus beneficios?

10. Un plan de producción $y \in Y$ es eficiente si $\nexists y' \in Y$ tal que $y' \geq y$, $y' \neq y$. Muestre que si $y \in Y$ maximiza el beneficio para unos precios $p \gg 0$ entonces es eficiente.

Capítulo 4

Equilibrio Walrasiano para Economías con Producción

A la economía definida en el Capítulo 2, de L bienes e I consumidores, le le adicionaremos J empresas. Cada empresa $j = 1, \ldots, J$ está definida por su tecnología Y^j. Cada consumidor i está definido por su dotación inicial ω^i, su preferencia $\succsim^i$ y por sus participaciones $\theta^i = (\theta^{i1}, \theta^{i2}, \ldots, \theta^{iJ})$ con $0 \leq \theta^{ij} \leq 1$ en los beneficios de cada empresa. Estas participaciones deben cumplir $\sum_{i=1}^{I} \theta^{ij} = 1$, de manera que nuestra economía es totalmente cerrada.

Entonces una Economía con Producción es la colección:

$$\mathcal{E} = \{(\omega^i, \succsim^i)_{i=1,\ldots,I}, (Y^j)_{j=1,\ldots,J}, (\theta^{ij})_{\substack{i=1,\ldots,I \\ j=1,\ldots,J}}\}$$

Asumiremos ahora que para $\overline{\omega} = \sum_{i=1}^{I} \omega^i$ y $Y = \sum_{j=1}^{J} Y^j$ existe $y' \in Y$ tal que $\overline{\omega} + y' \gg 0$ es decir que en el agregado para la economía en su conjunto, es posible disponer de cantidades positivas de todos los bienes considerados.

De la misma manera que en una economía de intercambio puro, definiremos una función exceso de demanda agregada y el cero de esta función será el equilibrio. En esa dirección estudiaremos primero las componentes del exceso de demanda agregada.

4.1. Oferta y Demanda

En una economía $\mathcal{E} = \{(\omega^i, \succsim^i)_{i=1,\ldots,I}, (Y^j)_{j=1,\ldots,J}, (\theta^{ij})_{\substack{i=1,\ldots,I \\ j=1,\ldots,J}}\}$, cada empresa j al resolver su problema:

$$\begin{array}{rc} Max & py \\ s.a. & y \in Y^j \end{array}$$

genera una oferta $y^j(p)$ y unos beneficios $\pi^j(p) = py^j(p)$.

A su vez cada consumidor i resuelve el problema:

$$\begin{array}{rc} Max & u^i(x) \\ s.a. & px \leq p\omega^i + \sum_{j=1}^{J} \theta^{ij} py^j(p) \\ & x \geq 0 \end{array} \tag{4.1}$$

donde las posibilidades de consumo de cada agente toman en cuenta su dotación inicial de bienes y su participación en las empresas [1] Cada consumidor genera una demanda $x^i(p)$ y el exceso de demanda de toda la economía esta definido como:

$$Z(p) = \sum_{i=1}^{I} x^i(p) - \sum_{j=1}^{J} y^j(p) - \sum_{i=1}^{I} \omega^i$$

y, al igual que antes, el equilibrio será el vector de precios $p^* \in \mathbb{R}^L_{++}$ tal que $Z(p^*) = 0$.

Para demostrar la existencia de equilibrio, probaremos que Z cumple las mismas propiedades del teorema 2.1. Para establecer estas propiedades, usaremos las propiedades de las ofertas $y^j(p)$ probadas en el capítulo anterior. Para las demandas $x^i(p)$ necesitamos probar en este nuevo contexto sus propiedades. Empezamos con los resultados:

Lema 4.1 *Si las tecnologías Y^j son no vacías, cerradas, acotadas superiormente y estrictamente convexas, la función "riqueza":*

$$W^i(p) = p\omega^i + \sum_{j=1}^{J} \theta^{ij} p y^j(p)$$

es continua y homogénea de grado 1.

Demostración

⌈ Directo a partir de la continuidad de cada $y^j(p)$ y del producto interno y la homegeniedad de grado 0 de cada $y^j(p)$. ⌋

Proposición 4.2 *Si las tecnologías Y^j son cerradas, acotadas superiormente, estrictamente convexas y con $0 \in Y^j$. Para todo $p \in \mathbb{R}^L_{++}$, el conjunto presupuestario:*

$$B^i(p) = \{x \in \mathbb{R}^L_+ | px \leq W^i(p)\}$$

es no vacío, convexo, compacto y para todo $\alpha > 0$: $B^i(\alpha p) = B^i(p)$.

Demostración

⌈ Como $0 \in Y^j$ entonces $py^j(p) \geq p0 = 0$ y $W^i(p) \geq p\omega^i \geq 0$, por lo tanto $0 \in B^i(p)$. Que $B^i(p)$ es convexo y cerrado es directo. Para ver que es acotado, basta notar $p_\ell x_\ell \leq px \leq W^i(p)$ con lo que si $x \in B^i(p)$:

$$0 \leq x_\ell \leq \frac{W^i(p)}{p_\ell}$$

Finalmente, al ser $W^i(p)$ homogénea de grado 1:

$$B^i(\alpha p) = \{x \in \mathbb{R}^L_+ | \alpha px \leq W^i(\alpha p)\} = \{x \in \mathbb{R}^L_+ | \alpha px \leq \alpha W^i(p)\}$$
$$= \{x \in \mathbb{R}^L_+ | px \leq W^i(p)\} = B^i(p)$$

⌋

[1] $p\omega^i + \sum_{j=1}^{J} \theta^{ij} p y^j(p) = p\left(\omega^i + \sum_{j=1}^{J} \theta^{ij} y^j(p)\right)$

El siguiente resultado servirá para establecer el paralelo del Teorema 1.15:

Teorema 4.3 *Si las preferencias $\succsim^i$ son racionales, continuas, estrictamente convexas, localmente no saciadas y las tecnologías Y^j son cerradas, acotadas superiormente, estrictamente convexas y con $0 \in Y^j$. Entonces para todo $p \in \mathbb{R}^L_{++}$ tenemos que :*
Existe un único $x^i(p) \in \mathbb{R}^L_+$, solución de (4.1), el cual cumple:

1. *$x^i(p)$ es continua en p.*
2. *$\forall \alpha > 0 : x^i(\alpha p) = x^i(p)$*
3. *$px^i(p) = W^i(p)$*

Demostración

⌈ Al igual que en el caso sin producción, la existencia de $x^i(p)$ está garantizada por la continuidad de las preferencias y la compacidad de $B^i(p) \neq \emptyset$, la unicidad viene de la convexidad estricta de $\succsim^i$ y la convexidad de $B^i(p)$. Para cada una de sus propiedades:

1. Debemos mostrar que para toda secuencia de precios $p^n \in \mathbb{R}^L_+$ covergente a $p \in \mathbb{R}^L_+$ se tiene que $x^i(p^n) \to x^i(p)$. Como $W^i(p)$ es continua: $W^i(p^n) \to W^i(p)$ y entonces la secuencia $x^i(p^n)$ es acotada. Usando un argumento similar al de la demostración del Teorema 3.5, si $x^i(p^n) \nrightarrow x^i(p)$, podemos construir una subsecuencia de $x^i(p^n)$ convergente a cierto $\bar{x}$, con términos a una distancia mayor que cierto $\delta > 0$ de $x^i(p)$. Para esta subsecuencia: $p^{n_k}x^i(p^{n_k}) \leq W^i(p^{n_k})$ y tomando límites: $p\bar{x} \leq W^i(p)$, luego $\bar{x} \in B^i(p)$. Tomemos ahora cualquier $x \in B^i(p)$, $x \neq 0$ es decir $0 < px \leq W^i(p)$ y para todo $\lambda \in]0,1[$: $0 < \lambda px < W^i(p)$. Por continuidad, para k suficientemente grande: $0 < \lambda p^{n_k}x < W^i(p^{n_k})$, de donde $\lambda x \in B^i(p^{n_k})$ y por lo tanto $x^i(p^{n_k}) \succsim^i \lambda x$ y en el límite $\bar{x} \succsim^i \lambda x$. De donde haciendo $\lambda \to 1$: $\bar{x} \succsim^i x$ y por consecuencia $\bar{x} = x^i(p)$, lo cual contradice $||\bar{x} - x^i(p)|| \geq \delta > 0$.
2. La homegeneidad se desprende directamente de $B^i(\alpha p) = B^i(p)$.
3. La no saciedad local de las preferencias no permiten una solución interior a (4.1) y por lo tanto $px^i(p) = W^i(p)$ ⌋

El último resultado que daremos nos servirá para ver el comportamiento en la frontera de la FEDA:

Teorema 4.4 *Si las preferencias $\succsim^i$ son racionales, continuas, estrictamente convexas, fuertemente monótonas y las tecnologías Y^j son cerradas, acotadas superiormente, estrictamente convexas y con $0 \in Y^j$. Entonces para toda secuencia de precios convergente a un punto en la frontera: $p^n \to \rho$ con $p^n \in \mathbb{R}^L_{++}$ y $\rho \gneqq 0$ con algún $\rho^n_{\ell'} = 0$, tenemos que o bien:*

$$\max_{\ell} x^i_\ell(p^n) \to +\infty \quad \textit{para cierto} \quad i = 1, \ldots, I$$

o

$$\min_{\ell} y^j_\ell(p^n) \to -\infty \quad \textit{para cierto} \quad j = 1, \ldots, J$$

Demostración

⌈ Para demostrar el resultado por contradicción, supongamos que para todo $i = 1, \ldots, I$ y todo $j = 1, \ldots, J$ las secuencias: $\max_\ell x^i_\ell(p^n)$ y $\min_\ell y^j_\ell(p^n)$ son acotadas y por lo tanto lo son las secuencias $x^i(p^n)$ y $y^j(p^n)$. Al ser acotadas poseen subsecuencias convergentes:

$$x^i(p^{n_k}) \to \bar{x}^i$$

y

$$y^j(p^{n_k}) \to \bar{y}^j$$

En cada uno de los puntos de estas subsecuencias se cumple:

$$p^{n_k} x^i(p^{n_k}) = p^{n_k}\omega^i + \sum_{j=1}^{J} \theta^{ij} p^{n_k} y^j(p^{n_k})$$

tomando límites:

$$\rho\bar{x}^i = \rho\omega^i + \sum_{j=1}^{J} \theta^{ij}\rho\bar{y}^j = W^i$$

Como hemos supuesto que para $\overline{\omega} = \sum_{i=1}^{I} \omega^i$ y $Y = \sum_{j=1}^{J} Y^j$ existe $y' \in Y$ tal que $\overline{\omega} + y' \gg 0$, sea $y' = \sum_{j=1}^{J} y'^j$. Por optimalidad: $p^{n_k} y^j(p^{n_k}) \geq p^{n_k} y'^j$ en el límite $\rho\bar{y}^j \geq \rho y'^j$, de la misma manera $\rho\bar{y}^j \geq 0$ esto junto con $\rho\omega^i \geq 0$ nos da $W^i \geq 0$. Ahora sumando sobre i:

$$\sum_{i=1}^{i} W^i = \sum_{i=1}^{i}\left(\rho\omega^i + \sum_{j=1}^{J}\theta^{ij}\rho\bar{y}^j\right) \geq \sum_{i=1}^{i}\left(\rho\omega^i + \sum_{j=1}^{J}\theta^{ij}\rho y'^j\right) =$$

$$= \rho\left(\sum_{i=1}^{i}\omega^i + \sum_{j=1}^{J}\sum_{i=1}^{i}\theta^{ij} y'^j\right) = \rho(\bar{\omega} + y') > 0$$

De donde obtenemos que para al menos un i, $W^i > 0$. Para este consumidor definimos

$$\beta^i = \{x \in \mathbb{R}^L_+ | \rho x \leq W^i\}$$

Tomemos ahora $x \in \beta^i$, para $0 < \lambda < 1$: $\lambda(\rho x) < W^i$. Por continuidad, para k suficientemente grande,

$$p^{n_k}(\lambda x) < p^{n_k}\omega^i + \sum_{j=1}^{J}\theta^{ij} p^{n_k} y^j(p^{n_k})$$

es decir $\lambda x \in B^i(p^{n_k})$ y por lo tanto $x^i(p^n) \succcurlyeq^i \lambda x$ de donde, al tomar límites para n_k y $\lambda \to 1$:

$$\bar{x} \succcurlyeq^i x$$

como esto es para todo $x \in \beta^i$, lo que hemos obtenido es que $\bar{x}$ es maximal para $\succcurlyeq^i$ en β^i. Ahora, como $\rho \gneqq 0$ con algún $\rho^n_{\ell'} = 0$ y $W^i > 0$, β^i es no acotado y por lo tanto las preferencias $\succcurlyeq^i$, fuertemente monótonas, no pueden tener elemento maximal en β^i. Al llegar a una contradicción , la prueba queda establecida. ⌋

4.2. Función Exceso de Demanda Agregada y Equilibrio

Dada la economía $\mathcal{E} = \{(\omega^i, \succsim^i)_{i=1,\dots,I}, (Y^j)_{j=1,\dots,J}, (\theta^{ij})_{\substack{i=1,\dots,I\\ j=1,\dots,J}}\}$, la función exceso de demanda agregada esta definida como:

$$Z(p) = \sum_{i=1}^{I} x^i(p) - \sum_{j=1}^{J} y^j(p) - \sum_{i=1}^{I} \omega^i \tag{4.2}$$

y, al igual que antes, el equilibrio será el vector de precios $p^* \in \mathbb{R}^L_{++}$ tal que $Z(p^*) = 0$.

Para demostrar la existencia de tal equilibrio, probaremos para esta Z un resultado similar al Teorema 2.1, con lo cual el Teorema 2.3 garantiza la existencia de equilibrio.

Teorema 4.5 *Si las preferencias $\succsim^i$ son racionales, continuas, estrictamente convexas, fuertemente monótonas y las tecnologías Y^j son cerradas, acotadas superiormente, estrictamente convexas y con $0 \in Y^j$. Entonces Z definida por (4.2) cumple*

1. *$Z(p)$ es continua.*
2. *$\forall \alpha > 0 : Z(\alpha p) = Z(p)$*
3. *$pZ(p) = 0$*
4. *$\exists s > 0$ tal que $\forall p \in \mathbb{R}^L_{++} : \min_{\ell=1,\dots,L} Z_\ell(p) > -s$*
5. *Si $p^n \to p \neq 0$ con $p_{\ell'} = 0$ para cierto ℓ': $\max_\ell Z_\ell(p^n) \to +\infty$*

Demostración

$\lceil$

1. $Z(p)$ es continua, por ser todas las $x^i(p)$ y $y^j(p)$ continuas.
2. Z es homogénea de grado cero al serlo todas las $x^i(p)$ y $y^j(p)$.

3.

$$\begin{aligned}
pZ(p) &= p\left(\sum_{i=1}^{I} x^i(p) - \sum_{j=1}^{J} y^j(p) - \sum_{i=1}^{I}\omega^i\right)\\
&= \sum_{i=1}^{I} px^i(p) - \sum_{j=1}^{J} py^j(p) - \sum_{i=1}^{I} p\omega^i\\
&= \sum_{i=1}^{I} px^i(p) - \sum_{j=1}^{J}\sum_{i=1}^{i} \theta^{ij} py^j(p) - \sum_{i=1}^{I} p\omega^i\\
&= \sum_{i=1}^{I}\left(px^i(p) - \sum_{j=1}^{J}\theta^{ij}py^j(p) - p\omega^i\right)\\
&= \sum_{i=1}^{I}\big(px^i(p) - W^i(p)\big)\\
&= \sum_{i=1}^{I}\big(W^i(p) - W^i(p)\big)\\
&= 0
\end{aligned}$$

4. La cota inferior se construye a partir de la cota inferior 0 de cada x^i y las cotas superiores K^i de cada y^j.

5. Esto consecuencia inmediata del Teorema 4.4 y de las cotas inferior y superior de x^i e y^j respectivamente.⌋

4.3. Eficiencia

Veremos en esta sección las versiones de los Teoremas del Bienestar para economías con producción. Primero daremos las definiciones previas para el caso de economías con producción.

Definición 4.6 (Asignación factible) *Dada una economía*

$$\mathcal{E} = \{(\omega^i, \succsim^i)_{i=1,\ldots,I}, (Y^j)_{j=1,\ldots,J}, (\theta^{ij})_{\substack{i=1,\ldots,I\\ j=1,\ldots,J}}\}$$

una asignación factible es un vector

$$(x, y) = (x^1, \ldots, x^I, y^1, \ldots, y^J) \in \mathbb{R}_+^{L\times I} \times \mathbb{R}^{L\times J}$$

tal que para todo $j = 1, \ldots, J$, $y^j \in Y^j$ y

$$\sum_{i=1}^{I} x^i = \sum_{i=1}^{I}\omega^i + \sum_{j=1}^{J} y^j$$

Definición 4.7 (Equilibrio) *Una asignación (x, y) factible es de equilibrio si existe $p \in \mathbb{R}_{++}^L$ tal que :*

1. *Para todo* $j = 1, \ldots, J$*:* $py^j \geq py$ *para todo* $y \in Y^j$

2. *Para todo* $i = 1, \ldots, I$*:* $u^i(x) > u^i(x^i)$ *implica* $px > p\omega^i + \sum_{j=1}^{J} \theta^{ij} py^j$

Definición 4.8 (Soporte) *Una asignación* (x, y) *factible es soportada por* $p \in \mathbb{R}^L_+$*,* $p \neq 0$*, si existe* $(W^1, \ldots, W^I) \in \mathbb{R}^I_+$ *tal que :*

1. $\sum_{i=1}^{i} W^i = \sum_{i=1}^{I} p\omega^i + \sum_{j=1}^{J} py^j$

2. *Para todo* $j = 1, \ldots, J$*:* $py^j \geq py$ *para todo* $y \in Y^j$

3. *Para todo* $i = 1, \ldots, I$*:* $u^i(x) \geq u^i(x^i)$ *implica* $px \geq W^i$

Definición 4.9 (Óptimo de Pareto Fuerte) *Una asignación*(x, y) *es un Óptimo de Pareto Fuerte si:*

1. *Es factible.*

2. $\nexists\, (\overline{x}, \overline{y})$ *asignación factible tal que:*

   a*)* $\forall i = 1, \ldots, I$ $u^i(\overline{x}^i) \geq u^i(x^i)$

   b*)* $\exists j$ *tal que* $u^j(\overline{x}^j) > u^j(x^j)$

Definición 4.10 (Óptimo de Pareto Débil) *Una asignación* (x, y) *es un Óptimo de Pareto Débil si:*

1. *Es factible.*

2. $\nexists\, (\overline{x}, \overline{y})$ *factible tal que:*$\forall i = 1, \ldots, I$ $u^i(\overline{x}^i) > u^i(x^i)$

Igual que en el caso de intercambio puro, todo Óptimo de Pareto Fuerte es un Óptimo de Pareto Débil y si las preferencias de los consumidores son continuas y fuertemente monótonas, todo Óptimo de Pareto Débil es un Óptimo de Pareto Fuerte.

También es verdad que bajo suposiciones suaves toda asignación de equilibrio es un óptimo de Pareto.

Teorema 4.11 (Primer Teorema del Bienestar) *Si las preferencias de los consumidores son Localmente No Saciadas, todo Asignación de Equilibrio es un Óptimo de Pareto Fuerte*

Demostración

⌈ Sea (x, y) una asignación de equilibrio con precios de equilibrio p y definamos:

$$W^i = p\omega^i + \sum_{j=1}^{J} \theta^{ij} py^j$$

por No Saciedad Local tenemos que $px^i = W^i$. Sea ahora una asignación (x', y') con $u(x'^i) \geq u(x^i)$ para todo i y (spg) $u(x'^1) > u(x^1)$. Como x^1 es la demanda de 1 a precios p debemos tener que

$$px'^1 > px^1$$

Para los demás consumidores si fuera verdad que $px'^i < px^i$ por la No Saciedad Local existirá un z^i tal que $pz^i < px^i$ y $u(z^i) > u(x'^i) \geq u(x^i)$ Lo cual contradice el hecho que x^i es la demanda de i a precios p. Luego debemos tener que

$$px'^i \geq px^i$$

Sumando tenemos que

$$\begin{aligned} p\sum_{i=1}^{I} x'^i &= px'^1 + \sum_{i=2}^{I} px'^i \\ &> px^1 + \sum_{i=2}^{I} px^i = \sum_{i=1}^{I} W^i = \sum_{i=1}^{I}\left(p\omega^i + \sum_{j=1}^{J}\theta^{ij}py^j\right) \\ &= p\bar{\omega} + \sum_{j=1}^{J} py^j \\ &\geq p\bar{\omega} + \sum_{j=1}^{J} py'^j = p\left(\bar{\omega} + \sum_{j=1}^{J} y'^j\right) \end{aligned}$$

es decir $p\sum_{i=1}^{I} x'^i > p\left(\bar{\omega} + \sum_{j=1}^{J} y'^j\right)$, como $p \gg 0$ la asignación (x', y') no es factible.⌋

El Segundo Teorema del Bienestar también sigue siendo valido:

Teorema 4.12 (Segundo Teorema del Bienestar) *Si todas las tecnologías son convexas y las preferencias de todos los consumidores son estrictamente convexas, fuertemente monótonas y continuas, entonces todo Óptimo de Pareto Débil es soportado por un vector de precios* $p \in \mathbb{R}^L_+$.

Demostración

⌈ Sea $(x^1, \ldots, x^I, y^1, \ldots, y^J)$ un Óptimo de Pareto Débil. Para cada consumidor i definimos $V^i = \{x \in \mathbb{R}^L_+ | x \succ^i x^i\}$ y luego el conjunto $V = \sum_{i=1}^{I} V^i - \{\overline{\omega}\}$. Como las preferencias son convexas, cada V^i es convexo y por lo tanto también los es V. Por la no saciedad local , cada V^i es no vacío y por lo tanto también los es V.

Por otro lado el conjunto $Y = \sum_{j=1}^{J} Y^j$ también es no vacío y convexo. Para estos conjuntos tenemos:

$$V \cap Y = \emptyset$$

si no fuera así, tendríamos una asignación (x', y') tal que $\sum_{i=1}^{I} x'^i - \overline{\omega} = \sum_{j=1}^{J} y'^j$, es decir factible con $x'^i \succ^i x^i$ para todo i, esto es imposible por ser (x, y) un Óptimo de Pareto Débil. Tenemos entonces dos conjuntos, V e Y, convexos, no vacíos y disjuntos, luego existe un hiperplano separador para ambos: $p \in \mathbb{R}^L$, $p \neq 0$ y $r \in \mathbb{R}$ tal que: $\forall x \in V$, $px \geq r$ y $\forall y \in Y$, $py \leq r$.

Supongamos ahora para cierto i', un $x \in \mathbb{R}^L_+$ tal que $x \succcurlyeq^{i'} x^{i'}$. Basados en la monotonicidad fuerte, para cada i tomemos un $\bar{x}^i$ tal que $\bar{x}^i \succ^i x^i$. Como las preferencias son estrictamente convexas, para $\alpha \in]0, 1[$:

$$\alpha\bar{x}^i + (1-\alpha)x^i \succ^i x^i$$

para $i \neq i'$ y para i':

$$\alpha \bar{x}^{i'} + (1-\alpha)x \succ^{i'} x^{i'}$$

Luego

$$\sum_{i\neq i'} (\alpha \bar{x}^i + (1-\alpha)x^i) + (\alpha \bar{x}^{i'} + (1-\alpha)x) - \overline{\omega} \in V$$

y por lo tanto

$$p\left(\sum_{i\neq i'} (\alpha \bar{x}^i + (1-\alpha)x^i) + (\alpha \bar{x}^{i'} + (1-\alpha)x) - \overline{\omega}\right) \geq r$$

haciendo α tender a 0:

$$p\left(\sum_{i\neq i'} x^i + x - \overline{\omega}\right) \geq r \tag{4.3}$$

Si tomamos $x = x^{i'}$ tenemos que:

$$p\left(\sum_{i=1}^{I} x^i - \overline{\omega}\right) \geq r$$

Como $(x^1, \ldots, x^I, y^1, \ldots, y^J)$ es factible $\sum_{i=1}^{I} x^i - \overline{\omega} = \sum_{j=1}^{J} y^j \in Y$ y por lo tanto también:

$$p\left(\sum_{i=1}^{I} x^i - \overline{\omega}\right) = p\sum_{j=1}^{J} y^j \leq r$$

Luego:

$$p\left(\sum_{i=1}^{I} x^i - \overline{\omega}\right) = r = p\sum_{j=1}^{J} y^j \tag{4.4}$$

Sea ahora para cierto j', $y \in Y^{j'}$ luego $\sum_{j\neq j'} y^j + y \in Y$ luego:

$$p\left(\sum_{j\neq j'} y^j + y\right) \leq r = p\sum_{j=1}^{J} y^j$$

de donde:

$$py \leq py^{j'}$$

También para cierto i' tomemos $x \succcurlyeq^{i'} x^{i'}$ por (4.3) y (4.4):

$$p\left(\sum_{i\neq i'} x^i + x - \overline{\omega}\right) \geq r = p\left(\sum_{i=1}^{I} x^i - \overline{\omega}\right)$$

luego:

$$px \geq px^{i'}$$

$\sum_{i \neq i'} x^i = \overline{\omega} - x^{i'} + \sum_{j=1}^{J} y^j$, reemplazando:

$$p\left(-x^{i'} + x\right) \geq r$$

Como $(x^1, x^2, \ldots, x^I)$ es factible $\sum_{i \neq i'} x^i = \overline{\omega} - x^{i'} + \sum_{j=1}^{J} y^j$, reemplazando:

$$p\left(-x^{i'} + x\right) \geq r$$

Definiendo $W^i = px^i$ tenemos las tres condiciones de la definición de soportabilidad, solo resta probar que $p \in \mathbb{R}_+^L$.

Para esto tomemos el ℓ-ésimo vector canónico $e_\ell \in \mathbb{R}^L$, por la monotonicidad fuerte para todo $i : x^i + e_\ell \succ^i x^i$ luego $p(x^i + e_\ell) \geq px^i$, de donde $p_\ell \geq 0$. $\rfloor$

4.4. Ejercicios

1. (Tomado de [1])Sea una economía de dos bienes, dos consumidores y una empresa. El consumidor 1 con preferencias representadas por

$$U^1(x_1, x_2) = \sqrt{x_1\, x_2}$$

con dotación inicial $\omega^1 = (3, 0)$ y $0 < \theta^1 < 1$. El consumidor 2 tiene

$$U^2(x_1, x_2) = 2Ln(x_1) + Ln(x_2)$$

dotación inicial $\omega^2 = (2, 0)$ y $\theta^2 = 1 - \theta^1$. La empresa tiene tecnología

$$Y = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x \leq 0 \;\; y \leq \sqrt{-x}\}$$

   a) Encuentra la función oferta de la empresa.
   b) Encuentra la función (o correspondencia) de demanda de cada consumidor.
   c) Encuentra la función (o correspondencia) de exceso de demanda de la economía $(Z(p_1, p_2))$.
   d) ¿Existe equilibrio en esta economía? ¿Cuál es?
   e) Verifica si Z cumple las 5 propiedades de la FEDA usadas para la demostración de la existencia de equilibrio.

2. Sea una economía de dos bienes, dos consumidores y una empresa. El consumidor 1 con preferencias representadas por

$$U_1(x_1, x_2) = \sqrt{x_1\, x_2}$$

con dotación inicial $\omega_1 = (1, 0)$ y $\theta_1 = 0{,}3$. El consumidor 2 tiene

$$U_2(x_1, x_2) = x_1 + Ln(x_2)$$

dotación inicial $\omega_2 = (2, 0)$ y $\theta_2 = 0{,}7$. La empresa tiene tecnología

$$Y = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x \leq 0 \;\; y \leq A\frac{x}{x-1}\}$$

donde $A > 0$ es un factor de productividad.

a) Encuentra la función oferta de la empresa.

b) Encuentra la función (correspondencia) de demanda de cada consumidor.

c) Encuentra la función (correspondencia) de exceso de demanda de la economía ($Z(p_1, p_2)$).

d) ¿Existe equilibrio en esta economía? ¿Cuál es?

e) Estudia el efecto del factor de productividad A en el equilibrio (precios y asignación).

3. (Tomado de [5]) Considera una economia de dos bienes (x_1, x_2) con un (único) consumidor con preferencias continuas, convexas y fuertemente monotonas y una empresa capaz de transformar una cantidad z del primer bien en una cantidad, no mayor que, $f(z)$ del segundo. f es una funcion creciente y estrictamente concava. Sean (p, w) los precios de los bienes y $(\overline{L}, 0)$ la dotacion inicial del consumidor. La empresa maximiza su beneficio tomando los precios como fijos. El consumidor es el propietario de la empresa, siendo su ingreso la suma de la venta del primer bien y los beneficios de la empresa.

   a) Plantea el problema de la empresa y el del consumidor.

   b) Encuentra unos precios de equilibrio para $U(x_1, x_2) = x_1 x_2$ y $f(z) = z^{1/2}$.

4. Tenemos una economía formada por dos consumidores:

   - Consumidor A: $U_A(x_{A1}, x_{A2}) = \min\{x_{A1}, x_{A2}/4\}$, $\omega_A = (a, 1)$, $\theta_A = 1/3$.
   - Consumidor B: $U_B(x_{B1}, x_{B2}) = (x_{B1})^{1/3}(x_{B2})^{2/3}$, $\omega_B = (1, b)$, $\theta_B = 2/3$.

   y una empresa con tecnología:

   $$Y = \{(x_1, x_2) | 4x_2 + x_1 \leq 0\, ,\, 4x_1 + x_2 \leq 0\}$$

   a) Plantea el problema de la empresa y resuélvelo (analítica o gráficamente), indicando para cual conjunto de precios el problema tiene solucíon (T^*). Escribe la funciones oferta y beneficio.

   b) Considerando solo $p \in T^*$, plantea y resuelve el problema de cada consumidor.

   c) Escribe la función exceso de demanda y verifica si cumple todas las propiedades . Si encuentras alguna que no se cumple, identifica el motivo.

   d) Existe equilibrio? Si existe encuéntralo, si no existe encuentra el motivo.

5. Considera una economía de intercambio puro 2x2 con los siguientes consumidores:

   - $u_1(x, y) = 2x + y$ y $w = (2, 3)$.
   - $u_2(x, y) = xy^3$ y $w = (1, 2)$.

   a) Encuentra la demanda de cada consumidor.

   b) Encuentra el equilibrio Walrasiano.

c) Determina el conjunto de los óptimos de Pareto

d) Dibuja la caja de Edgeworth, ubica los óptimos de Pareto, la curva de contrato y el equilibrio Walrasiano

e) Suponga ahora que los consumidores son propietarios a partes iguales de una empresa con función de oferta: $S(p_1, p_2) = (-\frac{p_2^2}{4p_1^2}, \frac{p_2}{p_1})$. Repita los partes (a) y (b).

6. (Tomado de [5]) Supongamos una economía donde los consumidores tienen preferencias continuas y fuertemente monótonas y existe una única empresa con tecnología Y. Muestra que si existe $y \in Y$ tal que $y + \sum_{i=1}^{N} \omega_i \gg 0$ entonces no puede haber un equilibrio con transferencias donde algunos de los precios sean nulos.

Capítulo 5

Bienestar

En los capítulos anteriores hemos estudiado un modelo de economía de intercambio con y sin producción, poniendo el énfasis en el mercado como mecanismo de intercambio. En este capítulo exploraremos una visión más centralizada para este intercambio/producción. Tomaremos el punto de vista de un planificador central, dictador benevolente o, de manera abstracta, de la sociedad como un todo unificado.

Dada una economía:

$$\mathcal{E} = \{(\omega^i, \succcurlyeq^i)_{i=1,\dots,I}, (Y^j)_{j=1,\dots,J}, (\theta^{ij})_{\substack{i=1,\dots,I \\ j=1,\dots,J}}\}$$

postulamos la (gaseosa) pregunta ¿qué es bueno para ella?.

Debe ser natural pensar que la respuesta a esta pregunta debe basarse en las preferencias (utilidades) de los consumidores.

Dada la economía $\mathcal{E} = \{(\omega^i, \succcurlyeq^i)_{i=1,\dots,I}, (Y^j)_{j=1,\dots,J}, (\theta^{ij})_{\substack{i=1,\dots,I \\ j=1,\dots,J}}\}$, con $\overline{\omega} = \sum_{i=1}^{I} \omega^i$ y $Y = \sum_{j=1}^{J} Y^j$, podemos construir el conjunto

$$X = \left\{(x^1, x^2, \dots, x^I) \geq 0 \;\middle|\; \sum_{i=1}^{I} x^i \in \bar{\omega} + Y\right\}$$

de todas las asignaciones de consumo factibles dadas la dotación inicial total y la tecnologías de transformación disponibles. Sobre este conjunto X cada consumidor tiene sus preferencias, basadas en la canasta que le toca en cada asignación. Sería muy positivo que podamos agregar estas preferencias individuales en una "preferencia social".

Lamentablemente el Teorema de Imposibilidad de Arrow nos dice que no hay una manera general de hacer esto convenientemente. Seamos más precisos en esto de general y conveniente.

Lo de general es porque se quiere una regla que se pueda aplicar siempre, para cualquier economía, es decir estamos buscando una función que salga del espacio de economías y le asigne a cada una de ellas una preferencia sobre el X correspondiente. A este concepto se le conoce como el **axioma de dominio irrestricto**.

Lo de conveniente se refiere a tres propiedades:

1. **Respeto a la unanimidad**: En cualquier economía si todos los individuos prefieren la asignación x a la asignación y, la preferencia social debe ser también tal que x es preferido a y.

2. **No dictatorial**: La agregación no debe de asignar como preferencia social siempre la preferencia de un individuo en particular.
3. **Independencia de las alternativas irrelevantes**: La preferencia social entre dos alternativas depende solo de las preferencias individuales sobre ellas.

Teorema 5.1 (Arrow) *No existe una regla de agregación social de dominio irrestricto, respeto a la unanimidad, no dictatorial y con independencia de las alternativas irrelevantes.*

En base a este resultado los intentos de agregación de preferencias deben sacrificar alguna de las propiedades pedidas. Típicamente estas son la de dominio irrestricto o la independencia de las alternativas irrelevantes. Nosotros sacrificaremos esta última.

5.1. Función de Bienestar Social

Si asumimos que cada preferencia individual está representada por una función utilidad y que el rango (valores de llegada) de todas ellas es comparable inter-agentes. En este caso una solución parcial pero sencilla al problema de agregación es construir, en base a estas funciones de utilidad individuales, un utilidad para toda la sociedad. Esta recibe el nombre de Función de Bienestar Social (FBS). Si tenemos una FBS buscar lo mejor para la sociedad es maximizar este FBS.

Definición 5.2 (Función de Bienestar Social) *Dada la economía $\mathcal{E}$ y el conjunto X de asignaciones factibles correspondiente, fijamos para cada preferencia $\succsim^i$ una función utilidad u^i que la represente, una FBS es:*

$$\begin{array}{rccc} W: & X & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (x^1,\dots,x^I) & \longrightarrow & W(u^1(x^1),\dots,u^I(x^I)) \end{array}$$

Una manera más práctica para definir la FBS es usar como dominio el conjunto de vectores de utilidad que se pueden alcanzar, esto es el conjunto de posibilidades de utilidad:

$$U = \{(u^1, u^2, \dots, u^I) \mid \exists (x,y) \text{ factible, con } u^i \leq u^i(x^i)\ \forall i = 1,2,\dots,I\}$$

Esto es más conveniente ya que el conjunto $X \subset \mathbb{R}^{I\times L}$ mientras que $U \subset \mathbb{R}^I$. Es por esto que es usual trabajar con FBS definidas sobre U:

$$\begin{array}{rccc} W: & U & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (u^1,\dots,u^I) & \longrightarrow & W(u^1,\dots,u^I) \end{array}$$

Una propiedad que normalmente se exige a una FBS es ser creciente o estrictamente creciente:

Definición 5.3 *Una FBS es creciente si $\forall u, u' \in U$ con $u \geq u'$ se tiene $W(u) \geq W(u')$ y si $u \gg u'$ se tiene $W(u) > W(u')$*

Una FBS es estrictamente creciente si $\forall u, u' \in U$ con $u \gneqq u'$ se tiene $W(u) > W(u')$

Así, una FBS es creciente si cuando un individuo aumenta su nivel de utilidad y ninguno lo disminuye la FBS no disminuye y si todos aumentan su nivel de utilidad la FBS aumenta. Por otro lado una FBS es estrictamente crecientes si cuando un individuo aumenta su nivel de utilidad y ninguno lo disminuye la FBS aumenta.

Las FBS más usadas son:

- **Utilitarista**: $W(u^1, u^2, \ldots, u^I) = \sum_{i=1}^{I} \beta_i u^i$
- **Rawlsiana**: $W(u^1, u^2, \ldots, u^I) = \text{mín}_{i=1,\ldots,I} \left\{\beta_i u^i\right\}$
- **CES** Asumiendo que los valores u^i son positivos:
  - $W(u^1, u^2, \ldots, u^I) = \left(\sum_{i=1}^{I} (\beta_i u^i)^{1-\rho}\right)^{\frac{1}{1-\rho}}$ para $\rho \neq 1$
  - $W(u^1, u^2, \ldots, u^I) = \sum_{i=1}^{I} \beta_i \ln(u^i)$ para $\rho = 1$[1]

Las FBS utilitarista y CES son estrictamente crecientes pero la FBS Rawlsiana es solamente creciente.

Otra propiedad interesante es la concavidad de W, que se puede interpretar como “aversión a la desigualdad”[2].

La FBS Utilitarista, al ser lineal, es indiferente a la desigualdad mientras la Rawlsiana presenta la máxima aversión. Para las CES se puede controlar este comportamiento con el parámetro ρ. Note que si $\rho = 0$ tenemos la FBS utilitarista y si $\rho \to +\infty$ tenemos la Rawlsiana.

Como la FBS le asigna a cada vector de posibilidades de utilidad $(u^1, u^2, \ldots, u^I) \in U$ un nivel de bienestar social $W(u^1, u^2, \ldots, u^I)$, el problema del planificador central será entonces:

$$\begin{aligned} \text{máx} \quad & W(u^1, u^2, \ldots, u^I) \\ s.a. \quad & (u^1, u^2, \ldots, u^I) \in U \end{aligned} \tag{5.1}$$

Esto es, maximizar el bienestar social de la economía. Debe ser obvio que la solución depende de la FBS que se elija. En general no hay ninguna razón positiva que permita preferir alguna FBS en lugar de otra. El uso de una FBS particular es más bien ”ideológico.º subjetivo.

Veamos ahora con cierto detalle el problema del planificador (5.1). Empecemos por caracterizar el conjunto U.

Proposición 5.4 *Si el conjunto de asignaciones factibles es no vacío, cerrado y acotado y las funciones de utilidad son continuas el conjunto U es cerrado y acotado superiormente.*

Si las funciones de utilidad son cóncavas y todas las tecnologías convexas, el conjunto U es convexo.

Sobre U podemos identificar los vectores de utilidad que corresponden a una asignación Pareto eficiente. Estos puntos conforman la Frontera de Pareto:

$$P = \{(u^1, u^2, \ldots, u^I) \in U \mid \nexists (u'_1, u'_2, \ldots, u'_I) \in U \text{ tal que } \forall i: \; u'_i \geq u^i \text{ y } \exists i: \; u'_i > u^i\}$$

La siguiente proposición identifica P con los vectores de utilidad de los Óptimos de Pareto.

[1] Equivalente a $W(u^1, u^2, \ldots, u^I) = \prod_{i=1}^{I} (u^i)^{\beta_i}$

[2] Similar a la aversión al riesgo en otros contextos

Proposición 5.5 *Una asignación* (x, y) *es un Óptimo de Pareto si y solo si* $(u^1(x^1), u^2(x^2), \dots, u^I(x^I)) \in P$

Para terminar este punto vemos que maximizar una FBS apropiada siempre nos da un resultado asociado a un óptimo de Pareto.

Proposición 5.6 *Si la FBS* W *es creciente el problema del Planificador Central* (5.1) *tiene solución en* P

En la siguiente sección veremos en mayor detalle estos resultados y cómo usarlos para estudiar el equilibrio de una economía.

5.2. Resultados Analíticos bajo diferenciabilidad

En lo que sigue, trabajaremos con la función utilitarista:

$$W(u) = \beta_1 u^1 + \beta_2 u^2 + \cdots + \beta_I u^I$$

para la cual podemos establecer:

Teorema 5.7 *Si* $u = (u^1, u^2, \dots, u^I) \in P$ *entonces existen* $\beta_i \geq 0$ *no todos nulos tal que en* u *la FBS* $W(u^1, u^2, \dots, u^I) = \sum_{i=1}^I \beta_i u^i$ *alcanza su máximo sobre* U.

Si la FBS $W(u^1, u^2, \dots, u^I) = \sum_{i=1}^I \beta_i u^i$ *con* $\beta_i > 0$ *alcanza su máximo sobre* U *convexo en* u *entonces* $u = (u^1, u^2, \dots, u^I) \in P$.

La maximización de la que habla el Teorema anterior es:

$$\begin{array}{rl} \text{máx} & \beta_1 u^1 + \beta_2 u^2 + \cdots + \beta_I u^I \\ s.a. & (u^1, u^2, \dots, u^I) \in U \end{array}$$

si no queremos pasar por la construcción del conjunto U este problema se puede escribir como:

$$\begin{array}{rl} \text{máx} & \beta_1 u^1(x^1) + \beta_2 u^2(x^2) + \cdots + \beta_I u^I(x^I) \\ s.a. & (x, y) \text{ es factible} \end{array}$$

o

$$\begin{array}{rl} \text{máx} & \beta_1 u^1(x^1) + \beta_2 u^2(x^2) + \cdots + \beta_I u^I(x^I) \\ s.a. & \displaystyle\sum_{i=1}^I x^i - \sum_{i=1}^I \omega^i = \sum_{j=1}^J y^j \\ & x^i \geq 0 \\ & y^j \in Y^j \end{array}$$

Si cada tecnología Y^j está definida por una función de producción $F^j(y^j) \leq 0$:

$$\begin{aligned}
\text{máx} \quad & \beta_1 u^1(x^1) + \beta_2 u^2(x^2) + \cdots + \beta_I u^I(x^I) \\
s.a. \quad & \sum_{i=1}^{I} x^i - \sum_{i=1}^{I} \omega^i = \sum_{j=1}^{J} y^j \\
& x^i \geq 0 \\
& F^j(y^j) \leq 0
\end{aligned} \tag{5.2}$$

Asumiendo diferenciabilidad, concavidad y convexidad donde corresponda y las condicione apropiadas para tener soluciones interiores podemos usar el lagrangiano :

$$L \equiv \beta_1 u^1(x^1) + \beta_2 u^2(x^2) + \cdots + \beta_I u^I(x^I) - \sum_{\ell=1}^{L} \lambda_\ell \left(\sum_{i=1}^{I} x_\ell^i - \sum_{i=1}^{I} \omega_\ell^i - \sum_{j=1}^{J} y_\ell^j \right) - \sum_{j=1}^{J} \mu^j F^j(y^j)$$

para caracterizar la solución con las condiciones de primer orden:

$$\partial_{x_\ell^i} L \equiv \beta_i \partial_\ell u^i(x^i) - \lambda_\ell = 0 \tag{5.3}$$

$$\partial_{y_\ell^j} L \equiv \lambda_\ell - \mu^j \partial_\ell F^j(y^j) = 0 \tag{5.4}$$

de donde obtenemos las condiciones de optimalidad:

$$\frac{\partial_\ell u^i}{\partial_{\ell'} u^i} = \frac{\lambda_\ell}{\lambda_{\ell'}} = \frac{\partial_\ell F^j}{\partial_{\ell'} F^j} \tag{5.5}$$

para cualquier combinación de i, j, ℓ, ℓ'.

Por otro lado si consideramos un contexto de Equilibrio Walrasiano con transferencias, cada consumidor i resuelve:

$$\begin{aligned}
\text{máx} \quad & u^i(x^i) \\
s.a. \quad & px^i \leq W^i \\
& x^i \geq 0
\end{aligned}$$

con Lagrangiano:

$$L^i \equiv u^i(x^i) - \gamma^i(px^i - W^i)$$

y condiciones de primer orden:

$$\frac{\partial}{\partial x_\ell^i} L^i \equiv \partial_\ell u^i(x^i) - \gamma^i p_\ell = 0 \tag{5.6}$$

de donde obtenemos:

$$\frac{\partial_\ell u^i}{\partial_{\ell'} u^i} = \frac{p_\ell}{p_{\ell'}} \tag{5.7}$$

Por su parte, las empresas resuelven:

$$\begin{aligned}
\text{máx} \quad & py^j \\
s.a. \quad & F^j(y^j) \leq 0
\end{aligned}$$

con Lagrangiano:

$$L^j \equiv py^j - \psi^j F^j(y^j)$$

y condiciones de primer orden:

$$\frac{\partial}{\partial x_\ell^j} L^j \equiv p_\ell - \psi^j \partial_\ell F^j(y^j) = 0 \tag{5.8}$$

de donde:

$$\frac{\partial_\ell F^j}{\partial_{\ell'} F^j} = \frac{p_\ell}{p_{\ell'}} \tag{5.9}$$

Observemos que en el caso de un Equilibrio Walrasiano con transferencias las condiciones (5.7) y (5.9) nos dicen que todas las relaciones marginales de (5.5) son iguales al ratio de precios $\frac{p_\ell}{p_{\ell'}}$. Es decir que para cada Óptimo de Pareto los valores de los multiplicadores λ_ℓ nos dan los precios que lo soportan como Equilibrio Walrasiano.

Por otro lado, de (5.3):

$$\partial_\ell u^i(x^i) = \frac{\lambda_\ell}{\beta_i}$$

y de (5.6):

$$\partial_\ell u^i(x^i) = \gamma^i p_\ell$$

podemos, identificando λ_ℓ con p_ℓ, observar que para obtener la asignación de equilibrio como óptimo de Pareto el peso de cada consumidor en la FBS debe ser igual a la reciproca de su multiplicador γ^i.

Finalmente, el teorema de la envolvente aplicado al problema de cada consumidor, en el contexto de equilibrio con transferencias, nos dice que el valor de γ^i es la utilidad marginal del ingreso del consumidor i en la canasta de consumo que obtiene.

Como conclusión tenemos que, si usamos una FBS utilitarista para determinar un OP en particular, a mayor peso relativo, menor utilidad marginal del ingreso, por lo tanto mayor riqueza. Visto de otro modo, si tenemos un EW, la FBS utilitarista que lo genera como OP debe ponerle mayor peso relativo a aquellos consumidores que tienen mayor riqueza a los precios de equilibrio.

Todo lo dicho hasta ahora puede usarse para construir un método de cálculo del equilibrio Walrasiano que veremos en la siguiente sección.

5.3. Método de Negishi

El método de Negishi es una estrategia para el cálculo del Equilibrio Walrasiano (y paralelamente también una demostración de su existencia). Su bondad radica en que se trabaja en un espacio de dimensión igual al número de agentes L y no en el espacio de bienes. En el caso de tener un número muy grande de bienes, incluso infinitos, pero un número pequeño de consumidores, esto es muy conveniente.

La idea de Negishi se basa en:

- Todo Equilibrio Walrasiano es un Óptimo de Pareto.
- Todo Óptimo de Pareto se puede encontrar resolviendo un problema como (5.2)

- Todo Óptimo de Pareto es un Equilibrio Walrasiano con transferencias.
- Todo Equilibrio Walrasiano es un Equilibrio Walrasiano con transferencias nulas.

Si la economía no cumple alguna de estas afirmaciones, el método de Negishi no es válido.

En base a estas afirmaciones se puede implementar el siguiente algoritmo de cálculo de equilibrio:

1. Resolver (5.2) tomando los pesos β_i como parámetros
2. Calcular los precios, de acuerdo a los β_i, que soportan el Óptimo
3. Calcular las transferencias, de acuerdo a los β_i, necesarias para tener un Equilibrio con transferencias[3].
4. Obtener el juego de parámetros que hacen todas las transferencias nulas.
5. Con los pesos β_i encontrados determinar los precios y asignaciones de equilibrio.

5.4. Ejercicios

1. En el Teorema de Imposibilidad de Arrow tenemos, entre otras, las siguientes hipótesis:

   a) Preferencia social racional.

   b) Independencia de las alternativas irrelevantes.

   c) Propiedad Paretiana.

   d) Ausencia de dictador.

   Para cada una de las siguientes funciones de agregación social encuentra cuales de las anteriores propiedades no son satisfechas.

   a) **Pluralidad**: Primero la alternativa que es la preferida por el mayor número de agentes, luego las siguientes sin contar las ya elegidas.

   b) **Borda**: Para cada agente numerar las alternativas según sus preferencias. Sumar dichos puntajes y ordenar según dicha suma.

   c) **Condorcet**: x es preferida o indiferente socialmente a y si x es preferida o indiferente por la mitad o más de los agentes.

   d) **Pseudo-condorcet**: Hacer votaciones por pares y ordenar según el número de elecciones ganadas por cada alternativa.

   e) **Agenda**: Ordenar al azar (uniformemente) las alternativas y enfrentar a la primera con la segunda en una votación por mayoría, tomar la ganadora y enfrentarla con la tercera en una votación por mayoría, tomar la ganadora y enfrentarla ..... A la alternativa que gane el último enfrentamiento se designa como la primera en la preferencia social. Repetir el procedimiento, sin variar el orden establecido, hasta ordenar todas las alternativas.

[3] Acá es donde entran las dotaciones iniciales.

2. (Tomado de [1])Considere una economía de dos consumidores y dos bienes.Los consumidores tienen dotación inicial $\omega^1 = (1,4)$ y $\omega^2 = (3,2)$ y utilidades:

$$U^1(x,y) = xy$$

$$U^2(x,y) = x^2y$$

   a) Resuelva:

$$\begin{array}{rl} \text{máx} & \alpha U^1(x^1,y^1) + (1-\alpha)U^2(x^2,y^2) \\ & \\ s.a. & 0 \le x^1 + x^2 \le 4 \\ & 0 \le y^1 + y^2 \le 6 \end{array}$$

   donde $0 \le \alpha \le 1$

   b) Encuentre el valor de α que hace que la solución anterior coincida con la asignación de equilibrio de la economía.

Bibliografía (References)

[1] Aliprantis, C.D., D.J. Brown y O. Burkinshaw, **Existence and Optimality of Competitive Equilibria**. Springer Verlag, 1990.

[2] Debreu, G. **Theory of Value**. Yale University Press. 1959.

[3] Hildebrand, W. y A.P. Kirman **Introducción al Análisis del Equilibrio**. Antoni Bosch, editor. 1982.

[4] Kreps,David M. **Curso de Teoría Microeconómica**. McGraw Hill,1994.

[5] Mas-Colell, A.,M.D. Winston, J.R. Green **Microeconomic theory**. Oxford University Press. 1995.

[6] Varian,Hall **Análisis Microeconómico**. Antoni Bosch, editor. 1992.